ECUACIONES, DESIGUALDADES Y SISTEMAS.

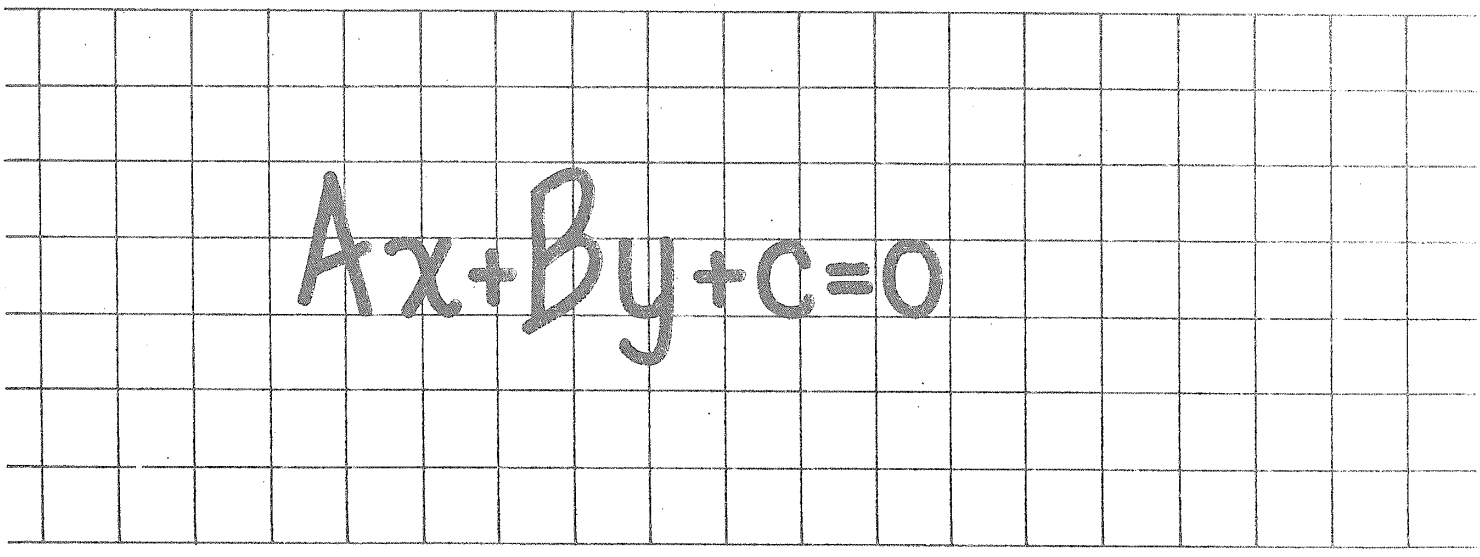
Soluciones gráficas

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. Desigualdades de primer grado
5. Ecuaciones de segundo grado
6. Desigualdades de segundo grado
7. La relación como modelo matemático
8. Funciones
9. Funciones exponenciales
10. Funciones logarítmicas
11. ***Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas***
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 11

ECUACIONES, DESIGUALDADES Y SISTEMAS.

Soluciones gráficas

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
ECUACIONES, DESIGUALDADES Y SISTEMAS.
SOLUCIONES GRÁFICAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1525-X

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

11.1 Sistemas de dos ecuaciones lineales. Solución gráfica 9

11.2 Desigualdades lineales (representación gráfica) 28

11.3 Sistemas de desigualdades lineales. Solución gráfica 48

11.4 Ecuaciones y desigualdades de primer grado con una variable. Solución gráfica 55

11.5 Ecuaciones cuadráticas con una variable. Solución gráfica 68

11.6 Desigualdades cuadráticas con una variable. Solución gráfica 81

11.7 Ecuaciones y desigualdades de segundo grado con dos variables 92

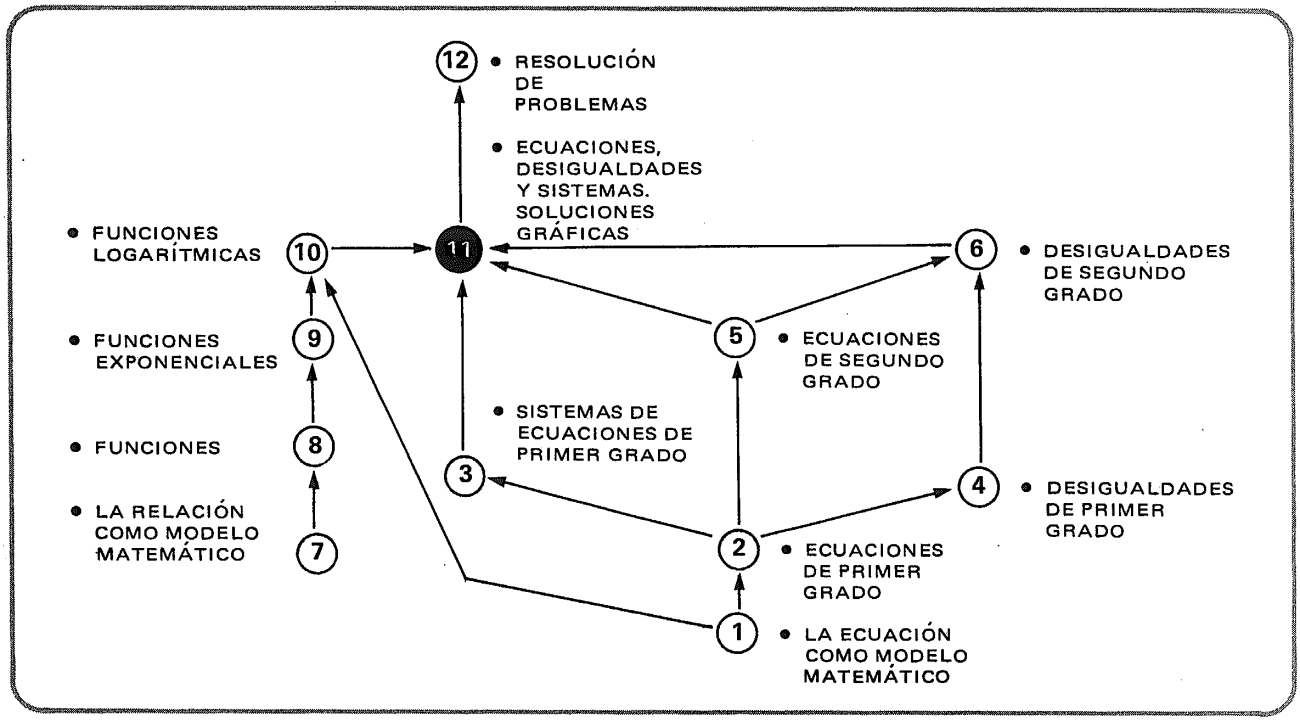
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

– ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
– sistemas de ecuaciones o desigualdades
– relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas

Objetivos: determinar gráficamente el conjunto solución de algunas formas de modelo matemático de tipo algebraico

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Resolución algebraica de		
– ecuaciones de primer grado	2	2
– sistemas de ecuaciones de primer grado	2	3
– desigualdades de primer grado	2	4
– ecuaciones de segundo grado	2	5
– desigualdades de segundo grado	2	6
• Relación (concepto y representación gráfica)	2	7
• Función (concepto y representación gráfica)	2	8

11.1

Sistemas de dos ecuaciones lineales.
Solución gráfica

1

Tenemos
una **ecuación**
de **primer grado**
con **dos variables:**

$$x + y = 6$$

$x, y \in \mathbb{R}$

2

Señalar las parejas
de números
(x,y)
que
satisfacen
la ecuación

$x + y = 6$
$x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$

y las que no
la satisfacen.

x	y	Sí	No
−5	11		
−4	4		
−3	9		
−2	8		
−1	6		
0	6		
1	5		
2	7		
3	3		
4	2		
5	4		
6	0		

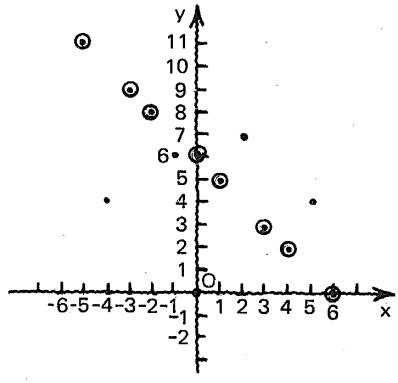
Sí
No
Sí
Sí
No
Sí
Sí
No
Sí
Sí
No
Sí

3

Representemos
ahora
en el plano cartesiano
estos
pares "ordenados", y
señalemos con ⊙
los que satisfacen la ecuación dada,
y
con •
los que no la satisfacen.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Observemos
que los puntos
"que satisfacen"
la ecuación dada
forman parte
de una recta;
tracémosla.



Respuesta
en el
cuadro siguiente

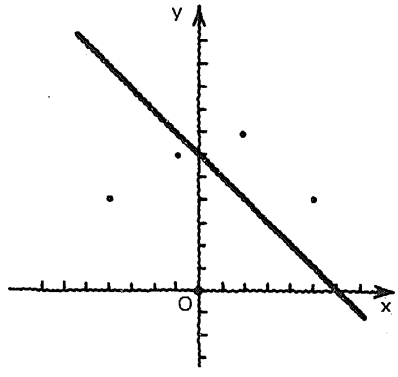
Esta recta
es
la representación gráfica
del

conjunto solución

de la
ecuación

$x + y = 6$

$x, y \in \mathbb{R}$



4

Sabemos que
el conjunto solución
de la ecuación

$x + y = 6 \quad x, y \in \mathbb{R}$

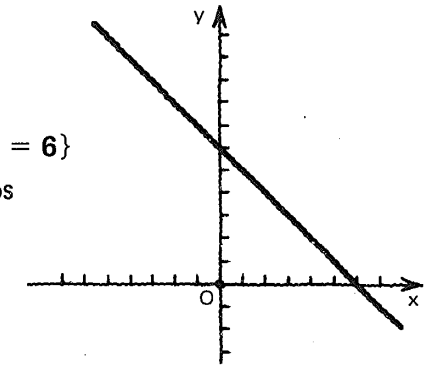
puede ser simbolizado así:

$S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge x + y = 6\}$

expresión que identificamos
como representativa de
una

función

cuya gráfica es la
recta mostrada.



5

Atención.

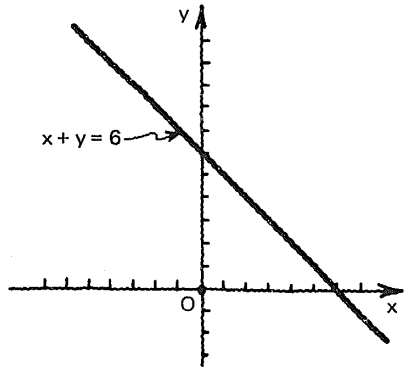
Diremos que esta

recta

es la

representación gráfica
de la ecuación

$x + y = 6$
$x, y \in \mathbb{R}$



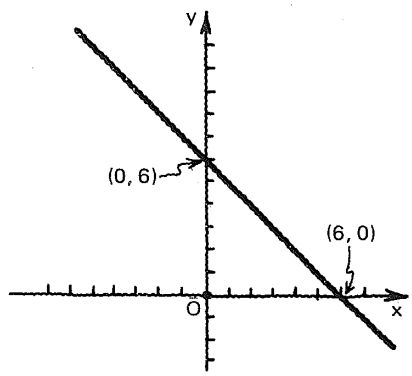
6

Observemos que
una manera rápida de
trazar la recta
que representa a la
ecuación $x + y = 6$
consiste en determinar las
intersecciones con los
ejes coordenados.

punto:

Si: $x = 0 \quad y = 6 \quad (0, 6)$

Si: $y = 0 \quad x = 6 \quad (6, 0)$



7

Se suele llamar

ecuación lineal

a una ecuación
que puede expresarse en la forma:

$$\mathbf{Ax + By + C = 0}$$
$$A, B, C \in \mathbb{R}$$

8

Entonces,

$$x + y = 6$$

o

$$x + y - 6 = 0$$

es una

ecuación lineal.

9

Otra

ecuación lineal:

$$\mathbf{2x - y = -3}$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

que puede también expresarse así:

$$\mathbf{2x - y + 3 = 0}$$

10

Para trazar la gráfica de

$$2x - y = -3 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

determinemos las intersecciones con los ejes coordenados.

Si $x = 0$ $y =$ ⌊___⌋

punto: ⌊_____⌋

Si $y = 0$ $x =$ ⌊___⌋

Punto: ⌊_____⌋

Si $x = 0$ $y = 3$

punto: (0, 3)

Si $y = 0$ $x = -\frac{3}{2}$

punto: $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

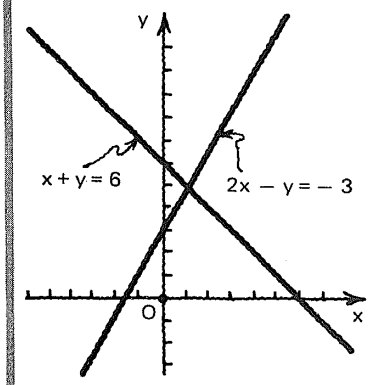
11

Con base en la información anterior tracemos la gráfica de

$$\mathbf{2x - y = -3} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

sobre el mismo plano cartesiano en que hemos trazado la gráfica de

$$\mathbf{x + y = 6} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$



12

Ahora bien, recordemos que:
si

S_1 es el conjunto solución de

$$\mathbf{x + y = 6}$$

y

S_2 es el conjunto solución de

$$\mathbf{2x - y = -3}$$

$S_1 \cap S_2$ es el **conjunto solución del sistema**

$$\mathbf{x + y = 6 \wedge 2x - y = -3}$$

13

Entonces:
este "es" el conjunto solución
de la ecuación

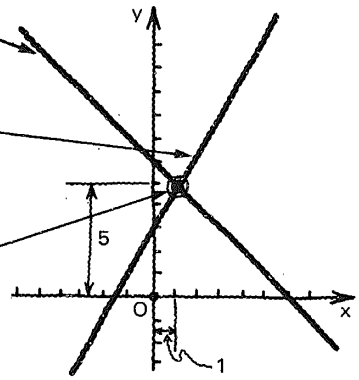
$$x + y = 6$$

este "es" el conjunto solución
de la ecuación

$$2x - y = -3$$

y este "es" el conjunto solución
del sistema

$$x + y = 6$$
$$\wedge$$
$$2x - y = -3$$



14

El par (1,5) satisface
simultáneamente a la ecuación

$x + y = 6$

en efecto:

$1 + 5 = 6$

$6 = 6 \blacktriangleleft$ PCV*

y a la ecuación

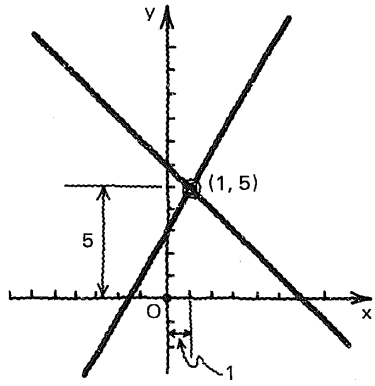
$2x - y = -3$

en efecto:

$2(1) - 5 = -3$

$-3 = -3 \blacktriangleleft$ PCV

*Proposición cerrada verdadera.



15

Hemos llamado

sistema de dos ecuaciones simultáneas de primer grado

a un sistema como éste:

$$x + y = 6 \wedge 2x - y = -3$$

16

Hemos estudiado 4 métodos
para determinar el conjunto solución
de un sistema de ecuaciones simultáneas:

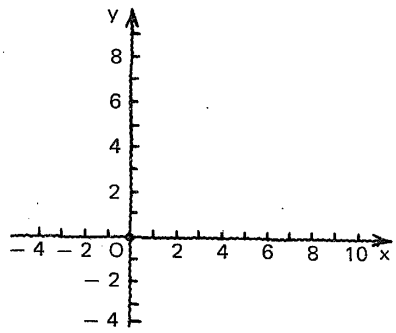
1. Reducción
2. Igualación
3. Sustitución
4. Determinantes

Consideremos el procedimiento **gráfico** descrito,
con sus limitaciones de precisión, como un
procedimiento alternativo de solución.

17

Determinar
gráficamente
el
conjunto
solución
del
sistema

$$2x - y - 1 = 0$$
$$\wedge$$
$$x - 2y + 4 = 0$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$



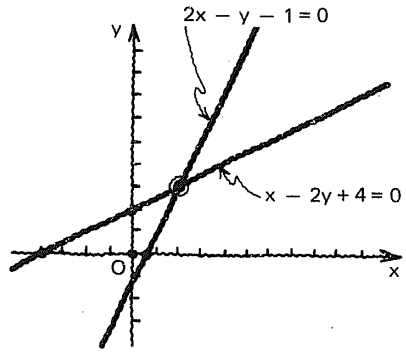
Respuesta
en el
cuadro siguiente

$S = \{(2, 3)\}$

En efecto:

$$2(2) - 3 - 1 = 0$$
$$4 - 3 - 1 = 0$$
$$0 = 0$$
▲
PCV

$$2 - 2(3) + 4 = 0$$
$$2 - 6 + 4 = 0$$
$$0 = 0$$
▲
PCV

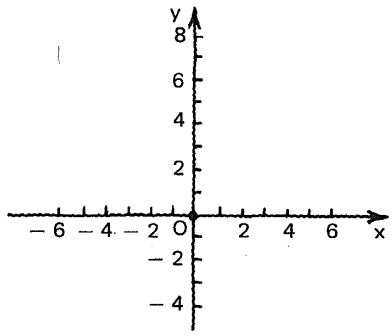


18

Determinar gráficamente el conjunto solución del sistema

$$2x + 3y = 6 \;\wedge\; y = 4$$

$x, y \in \mathbb{R}$



Respuesta en el cuadro siguiente

$S = \{(-3, 4)\}$

En efecto:

$2(-3) + 3 \cdot 4 = 6$

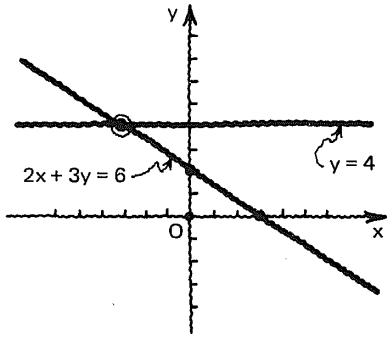
$-6 + 12 = 6$

$6 = 6$

▲ PCV

$4 = 4$

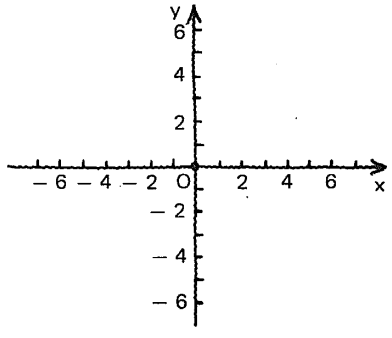
▲ PCV



19

Determinar gráficamente la solución del sistema

$$y = x + 3 \;\wedge\; x = -3$$



Respuesta en el cuadro siguiente

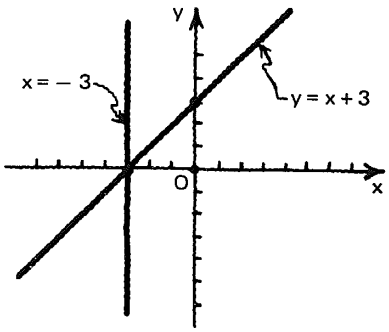
$S = \{(-3, 0)\}$

En efecto:

$0 = -3 + 3$

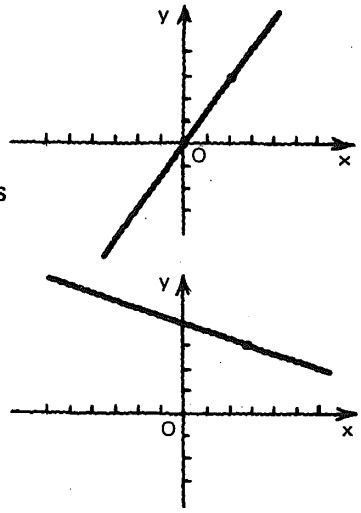
$0 = 0$ ◀ PCV

$-3 = -3$ ◀ PCV



20

Cuando la recta "pase
por el origen"
o
cuando una o ambas intersecciones
con los ejes coordenados
"caigan fuera del cuadro"
será necesario determinar
puntos adicionales
"dentro del cuadro"
para poder
trazar la gráfica.



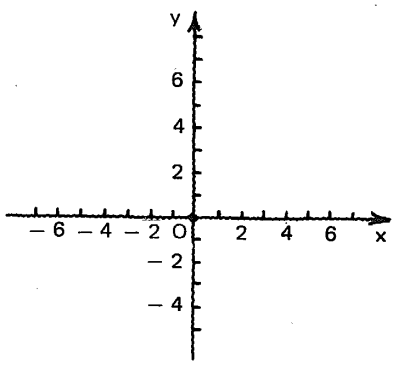
21

Determinar
gráficamente
el
conjunto solución
del
sistema

$5x - 3y - 15 = 0$

$\wedge$

$x + 3y - 21 = 0$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

$S = \{(6, 5)\}$

En efecto:

$6 + 3(5) - 21 = 0$

$6 + 15 - 21 = 0$

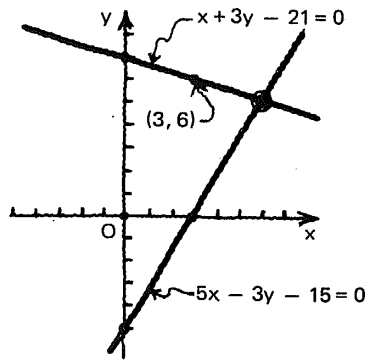
$21 - 21 = 0$

$0 = 0$ ◀ PCV

$5(6) - 3(5) - 15 = 0$

$30 - 15 - 15 = 0$

$0 = 0$ ◀ **PCV**



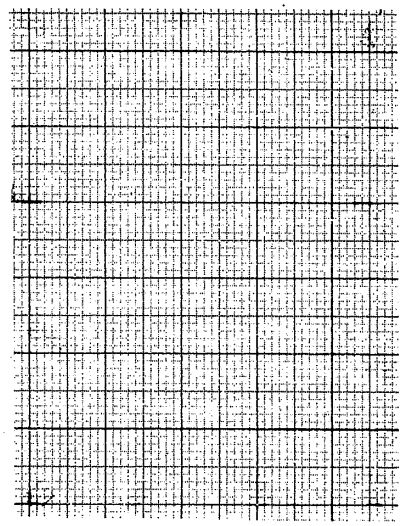
22

Determinar gráficamente el conjunto solución del sistema

$4x - 3y = 7$

$\wedge$

$5x + 2y = 13$



$S = \left\{\left(\frac{53}{23}, \frac{17}{23}\right)\right\}$

o

$S = \{(2.3043478, 0.73913043)\}$

Resultados obtenidos analíticamente y proporcionados para fines de verificación de los resultados gráficos.

2.11.1.1

Práctica adicional, si se considera necesario.

23

Consideremos la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

y expresémosla en la forma $y = f(x)$.

$y =$ [_____]

Por ejemplo:

$$-\frac{A}{B} x - \frac{C}{B}$$

24

La ecuación

$$y = -\frac{A}{B} x - \frac{C}{B}$$

se suele escribir así:

$$y = mx + b$$

en que:

$$m = -A/B$$

y

$$b = -C/B$$

25

Recordemos que la expresión

$$y = mx + b$$

representa la regla de correspondencia de una

función lineal.

26

En la ecuación

$$y = mx + b$$

a **m** se le llama la
pendiente de la recta,
y es un índice
de su grado de inclinación*.

*Posteriormente estableceremos con más precisión el concepto de pendiente.

27

En la ecuación

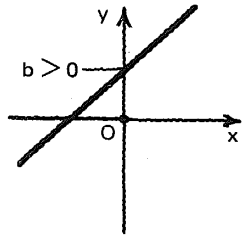
$$y = mx + b$$

a **b** se le llama la **ordenada al origen**
de la recta,
y
es precisamente
la ordenada del punto de intersección de la
recta con el eje de las y*.

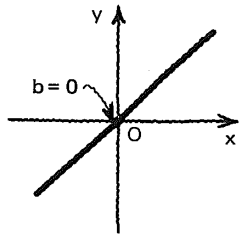
*En efecto, si $x = 0$, $y = b$.

28

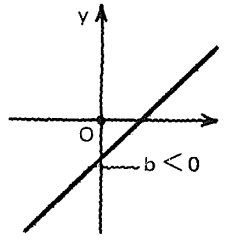
En $y = mx + b$:



Si $b > 0$,
la recta interseca
al eje de las y
arriba del origen.



si $b = 0$,
la recta interseca
al eje de las y
en el origen.



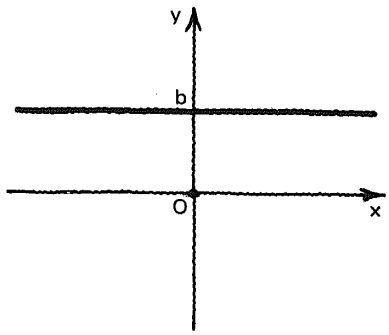
si $b < 0$,
la recta interseca
al eje de las y
abajo del origen.

29

En

y = mx + b

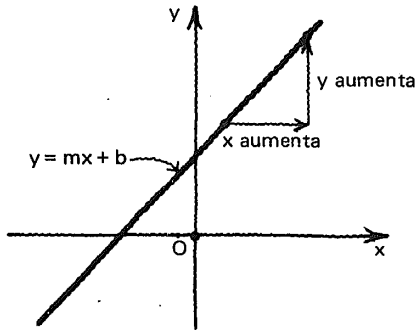
si m = 0
la recta es **horizontal**
(puesto que la ecuación
se convierte en y = b)
y es la gráfica
de una **función constante.**



30

Más adelante
podremos
demostrar que
si m > 0
la gráfica es una

recta "creciente".

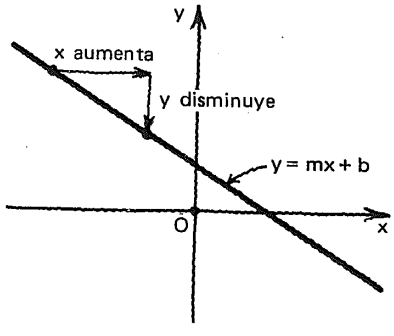


recta creciente

31

También
demostraremos que:
si m < 0
la gráfica es una

recta "decreciente."



recta decreciente

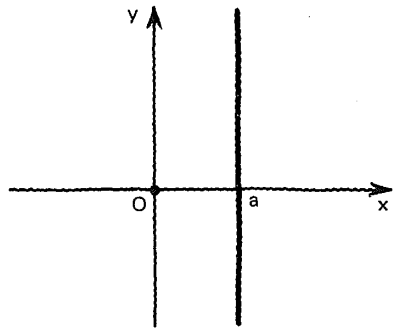
32

La pendiente de una

recta vertical

no está definida
y
la ecuación adopta la forma:

x = a

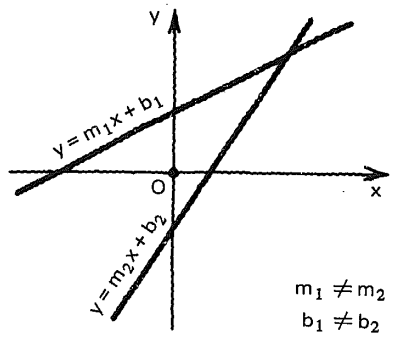


33

Si dos rectas tienen
pendientes diferentes
y
ordenadas al origen
también diferentes,
son

concurrentes*

(se intersecan en un punto
y sólo uno).



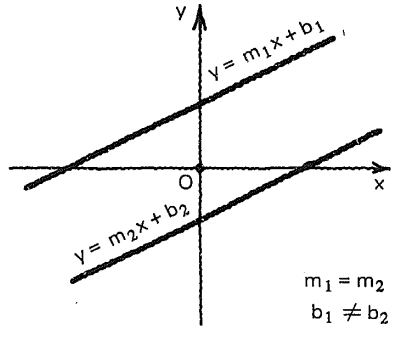
*o incidentes o intersecantes.

34

Si dos rectas tienen
pendientes iguales
y
ordenadas al origen
diferentes
son

paralelas

(no se intersecan)

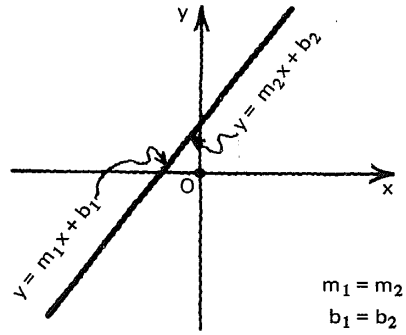


35

Si dos rectas tienen pendientes iguales y ordenadas al origen también iguales, son

coincidentes

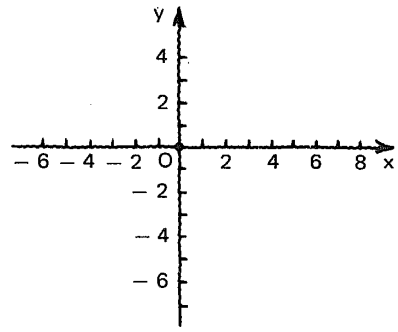
(se intersecan en todos sus puntos).



36

Determinar gráficamente el conjunto solución del sistema

$$3x - 4y = 12$$
$$\wedge$$
$$6x - 8y = 24$$



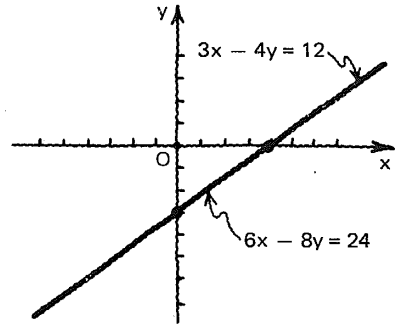
Respuesta en el cuadro siguiente

Conjunto solución del sistema dado por comprensión:

$S = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge 3x - 4y = 12\}$

o

$S = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge 6x - 8y = 24\}$



37

Vemos que:
las ecuaciones

$$3x - 4y = 12 \quad ①$$

y

$$6x - 8y = 24 \quad ②$$

son

equivalentes,

es decir,
tienen el mismo
conjunto solución.

38

$$3x - 4y = 12 \quad ①$$

$$6x - 8y = 24 \quad ②$$

La ecuación ② resulta de multiplicar
los dos miembros de la ecuación ① por **2.**
A un sistema como éste
le hemos llamado

indeterminado.

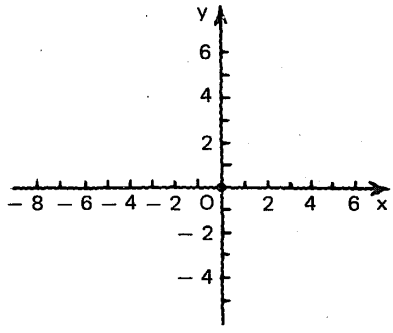
39

Determinar
gráficamente
el
conjunto solución
del
sistema

$$2x - y + 4 = 0$$

$$\wedge$$

$$y = 2x$$



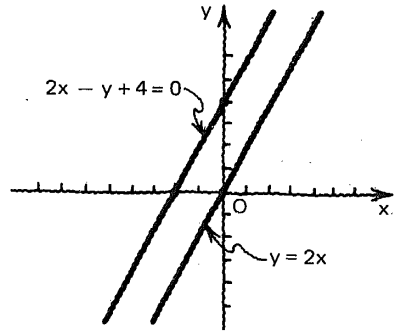
Respuesta
en el
cuadro siguiente

$S = \phi$

$y = 2x + 4$

$y = 2x$

Las dos rectas tienen la misma pendiente; son **paralelas.**



40

A un sistema como éste

$$y = 2x + 4$$
$$\wedge$$
$$y = 2x$$

le hemos llamado

incompatible.

41

En general, si en

$$y = m_1 x + b_1$$
$$\wedge$$
$$y = m_2 x + b_2$$
$$m_1 = m_2$$

el sistema es

incompatible.

42

1. Un sistema de dos ecuaciones lineales de la forma

$y = m_1 x + b_1$

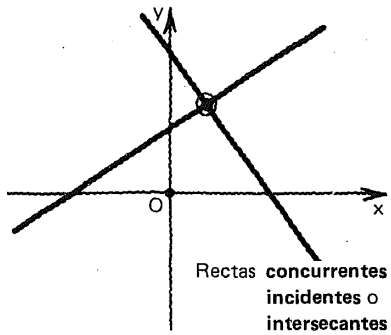
$\wedge$ $x, y \in \mathcal{R}$

$y = m_2 x + b_2$

tiene un conjunto solución constituido por un par ordenado único

si $m_1 \neq m_2$,

y le llamamos **sistema compatible.**



Rectas **concurrentes incidentes** o **intersecantes**

43

2. Un sistema de dos ecuaciones lineales de la forma

$y = m_1 x + b_1$

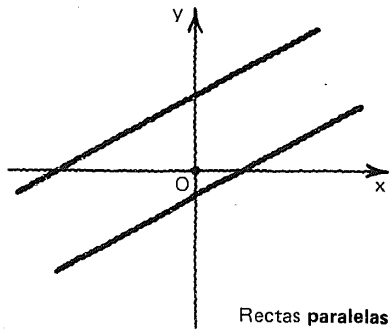
$\wedge$ $x, y \in \mathcal{R}$

$y = m_2 x + b_2$

tiene un conjunto solución vacío si

$m_1 = m_2 \wedge b_1 \neq b_2$

y le llamamos **sistema incompatible.**



Rectas **paralelas**

44

3. Un sistema de dos ecuaciones lineales de la forma

$y = m_1 x + b_1$

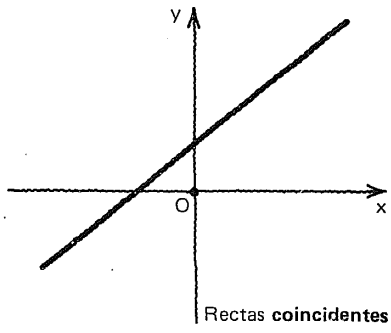
$\wedge$ $x, y \in \mathcal{R}$

$y = m_2 x + b_2$

tiene un conjunto solución constituido por **un número infinito de pares ordenados,**

si $m_1 = m_2 \wedge b_1 = b_2$

y le llamamos **sistema indeterminado.**



Rectas **coincidentes**

2.11.1.2

Práctica adicional
de
determinación gráfica del conjunto solución
de un
sistema de dos ecuaciones lineales,
si
se considera necesario.

2.11.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* gráficamente el conjunto solución de un sistema dado, de la forma:

  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

  $\wedge$

  $A_2x + B_2y + C_2 = 0;$

- *decir* si un sistema de ecuaciones lineales es compatible, incompatible o indeterminado;

- *escribir* el sistema en la forma

  $y = m_1x + b_1$

  $\wedge$

  $y = m_2x + b_2;$

- *trazar* la gráfica cartesiana correspondiente.

11.2

Desigualdades lineales (representación gráfica)

45

Una **ecuación lineal** con dos variables:

$$2x - y = 1 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Una **desigualdad lineal** con dos variables:

$$2x - y > 1 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

46

En general,
si en una **ecuación lineal**
de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

sustituimos el signo $=$ por alguno
de los signos $>$, $<$, $\geqslant$ o $\leqslant$
obtenemos una **desigualdad lineal**
que vamos a simbolizar así:

$$Ax + By + C \gtrless 0$$

47

El símbolo

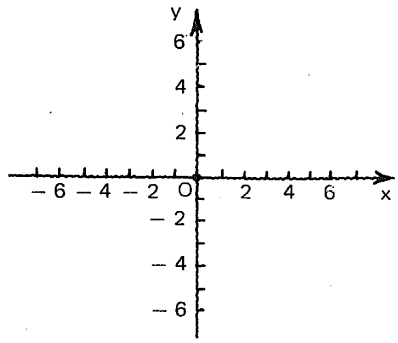
$\gtrless$

lo leeremos:
"es mayor, o menor,
o igual o mayor,
o igual o menor, que"

48

Representemos gráficamente el conjunto solución de la ecuación

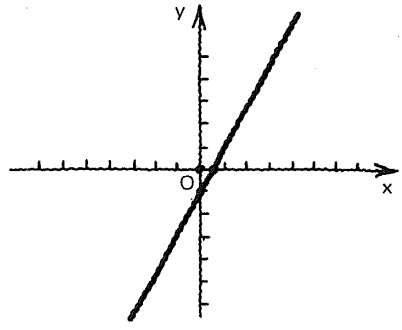
$$y = 2x - 1$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$



Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge y = 2x - 1\}$$



49

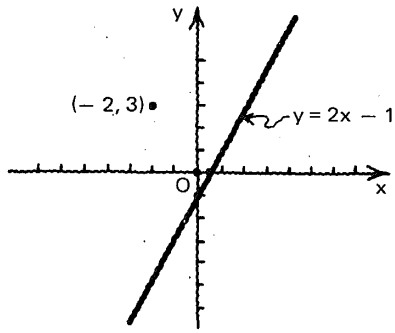
Atención

el par señalado ¿satisface la desigualdad

$y > 2x - 1$?

$x, y \in \mathbb{R}$

Sí/No



- Sí

En efecto:

$3 > 2(-2) - 1$

$3 > -4 - 1$

$3 > -5$ ◀ PCV

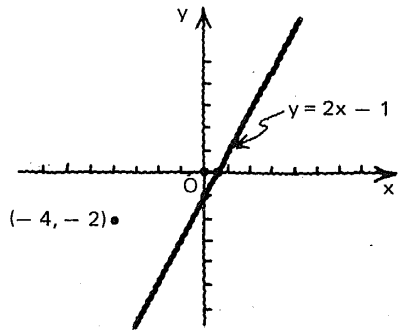
50

El par señalado ¿satisface la desigualdad

$y > 2x - 1$?

$x, y \in \mathbb{R}$

Sí/No



- Sí

En efecto:

$-2 > 2(-4) - 1$

$-2 > -8 - 1$

$-2 > -9$ ◀ PCV

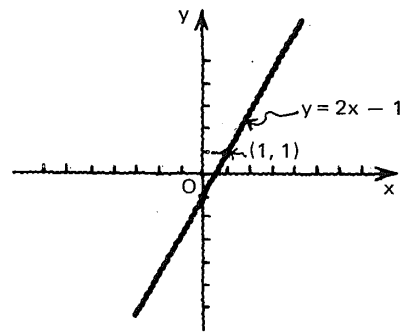
51

El par señalado ¿satisface la desigualdad

$y > 2x - 1$?

$x, y \in \mathbb{R}$

Sí/No



- No

En efecto:

$1 > 2(1) - 1$

$1 > 2 - 1$

$1 > 1$ ◀ PCF

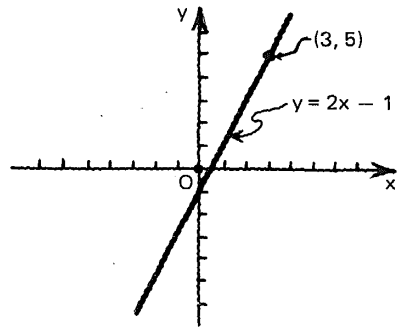
52

El par señalado ¿satisface la desigualdad

$y > 2x - 1$?

$x, y \in \mathbb{R}$

Sí/No



- No

En efecto:

$5 > 2(3) - 1$
$5 > 6 - 1$
$5 > 5$ ◀ PCF

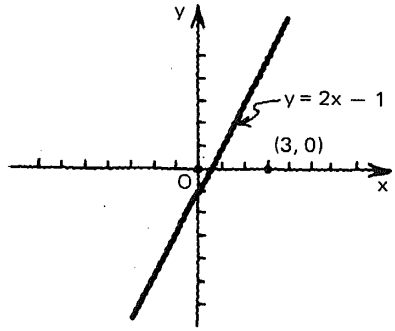
53

El par señalado ¿satisface la desigualdad

$y > 2x - 1$?

$x, y \in \mathbb{R}$

Sí/No



- No

En efecto:

$0 > 2(3) - 1$
$0 > 6 - 1$
$0 > 5$ ◀ PCF

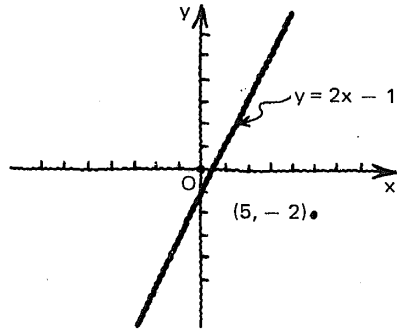
54

El par señalado ¿satisface la desigualdad

$y > 2x - 1$?

$x, y \in \mathbb{R}$

Sí/No



- No

En efecto:

$-2 > 2(5) - 1$
$-2 > 10 - 1$
$-2 > 9$ ◀ PCF

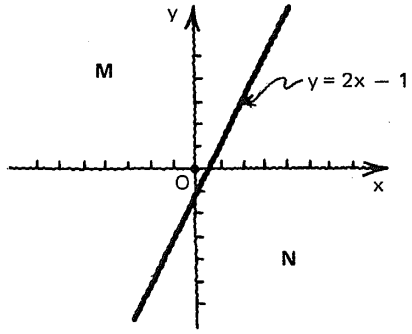
55

Observemos que:
la recta $y = 2x - 1$
divide al plano cartesiano
en **dos** regiones
disjuntas o **semiplanos***.
Un punto del plano
puede pertenecer:

al semiplano **M**
al semiplano **N**

o bien a la propia recta

$y = 2x - 1$



*Semiplanos abiertos, para ser más precisos.

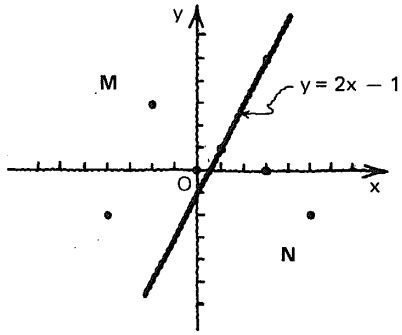
56

Atención

Todos los puntos
pertenecientes
al **semiplano M**
representan
pares ordenados
que **satisfacen**
la desigualdad

$y > 2x - 1$

V/F



V

57

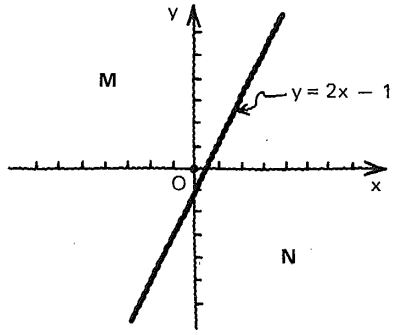
Todos los puntos
pertenecientes
a la **recta**

$y = 2x - 1$

representan
pares ordenados
que
satisfacen
la desigualdad

$y > 2x - 1$

V/F



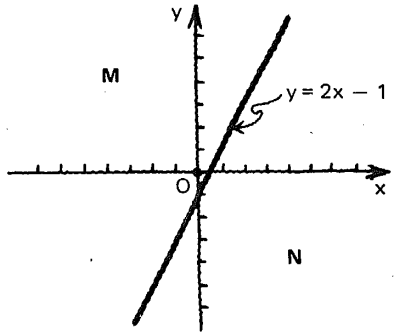
F

58

Todos los puntos pertenecientes al **semiplano N** representan pares ordenados que **satisfacen** la desigualdad

$$y > 2x - 1.$$

V/F

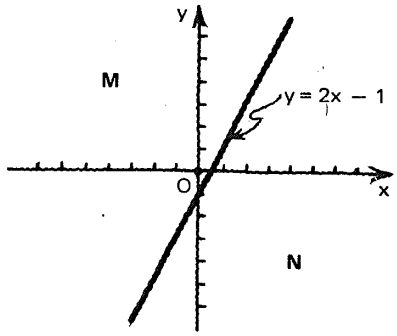


F

59

Todos los puntos del semiplano **M**, y sólo ellos, "satisfacen" la desigualdad

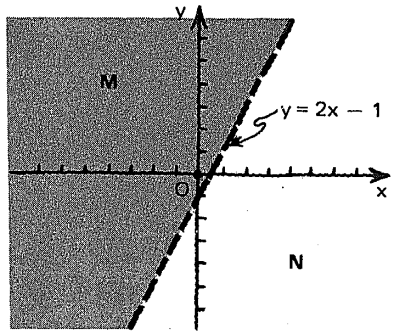
$$y > 2x - 1.$$



60

Representaremos así el conjunto solución de la desigualdad

$$y > 2x - 1.$$



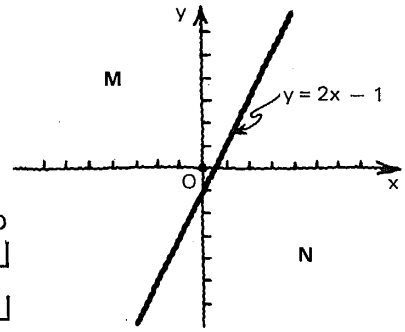
61

Atención.

Los puntos "que satisfacen" la desigualdad

$y \geqslant 2x - 1$

están en:



	Sí	No
el semiplano M	☐	☐
el semiplano N	☐	☐
la recta $y = 2x - 1$	☐	☐

Sí
No
Sí

62

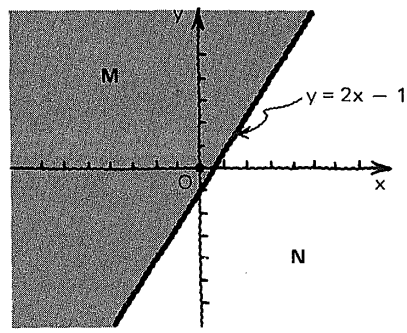
Los puntos "que satisfacen" la desigualdad

$y \geqslant 2x - 1$

están en el semiplano M o en la recta

$y = 2x - 1.$

Esto lo representaremos así:

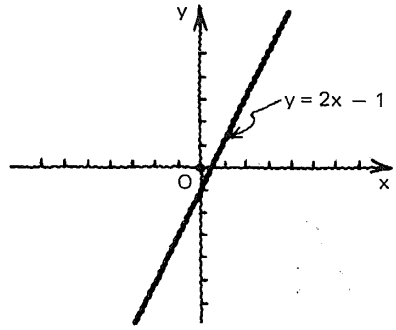


63

Completar la representación gráfica de la desigualdad

$\mathbf{y < 2x - 1}$

$x, y \in \mathbb{R}$

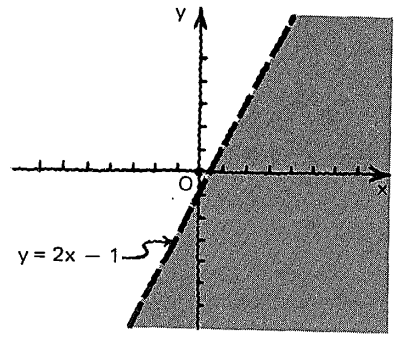


Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de

$y < 2x - 1$

$x, y \in \mathbb{R}$

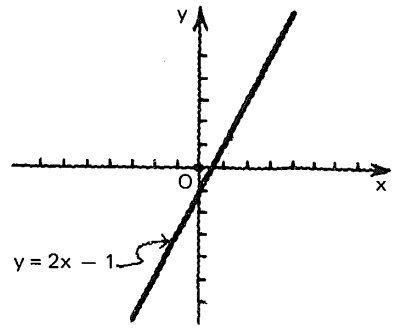


64

Completar la representación gráfica de

$y \leqslant 2x - 1$

$x, y \in \mathbb{R}$

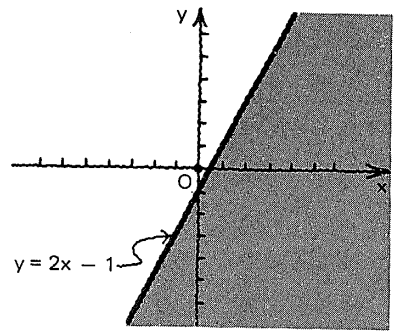


Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de

$y \leqslant 2x - 1$

$x, y \in \mathbb{R}$

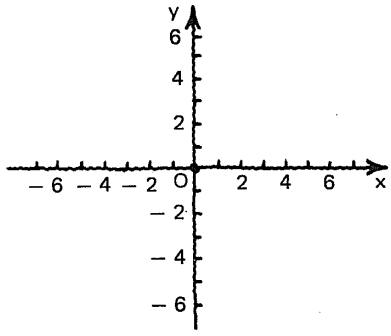


65

Completar la representación gráfica de

$y = -x + 3$

$x, y \in \mathbb{R}$

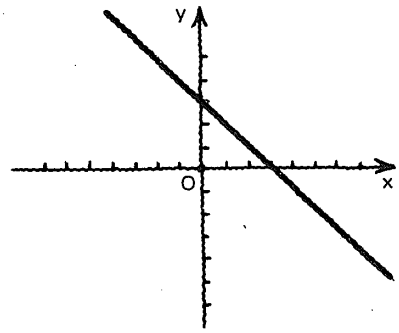


Respuesta en el cuadro siguiente

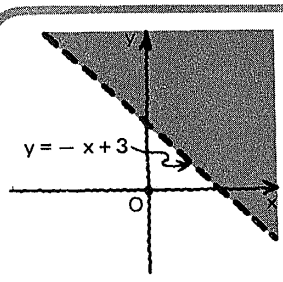
Representación gráfica de

$y = -x + 3$

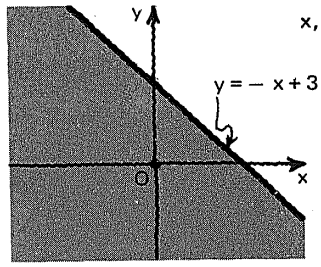
$x, y \in \mathbb{R}$



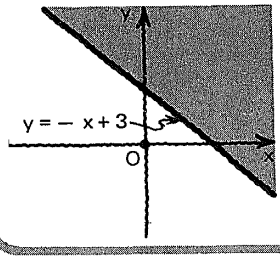
66



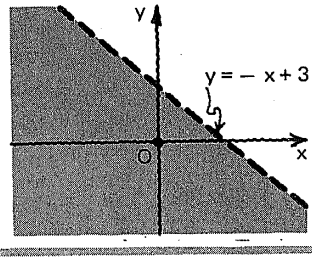
Gráfica de



Gráfica de

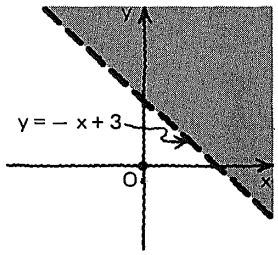


Gráfica de

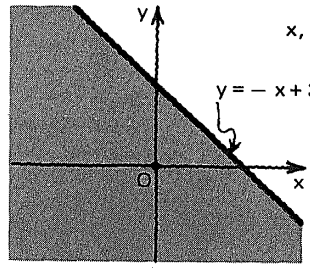


Gráfica de

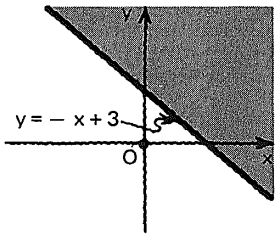
Respuesta en el cuadro siguiente



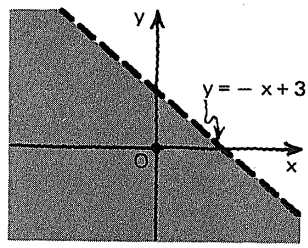
Gráfica de
$y > -x+3$



Gráfica de
$y \leqslant -x+3$



Gráfica de
$y \geqslant -x+3$



Gráfica de
$y < -x+3$

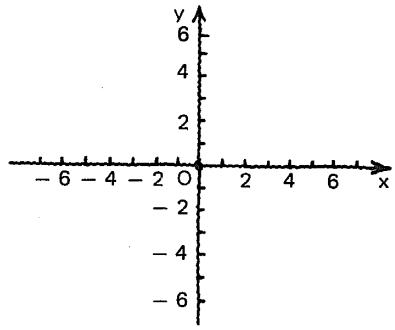
67

Atención.

Completar la representación gráfica de

$y = 2x + 2$

$x, y \in \mathbb{Z}$

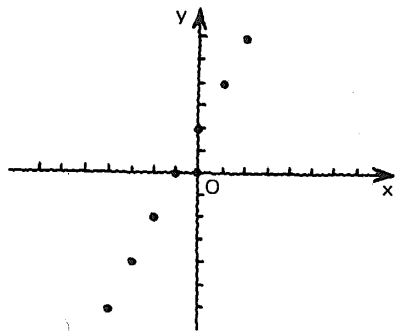


Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de

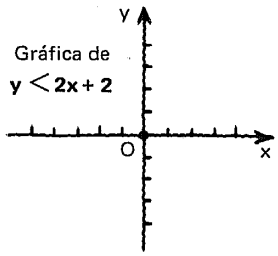
$y = 2x + 2$

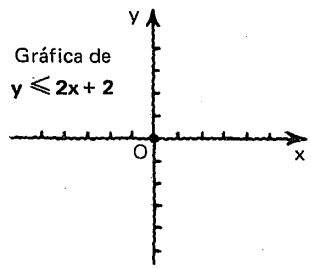
$x, y \in \mathbb{Z}$

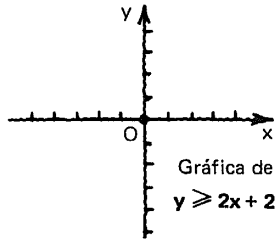


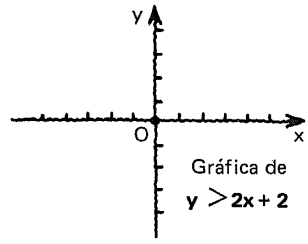
68

Completar las gráficas siguientes para x, y $\in \mathbb{Z}$ y ver la respuesta en el cuadro siguiente.

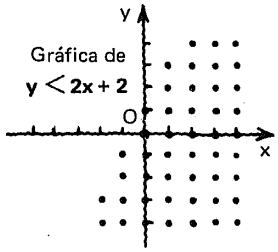


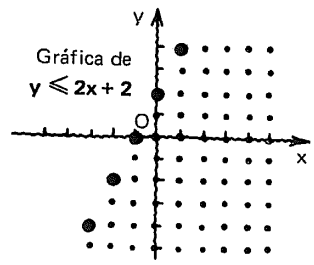


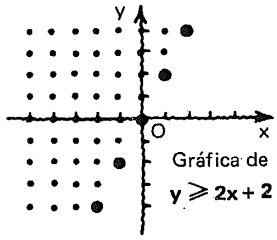


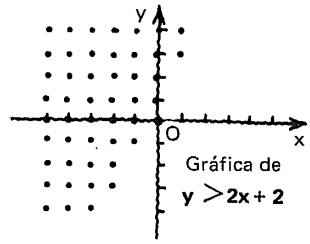


x, y $\in \mathbb{Z}$







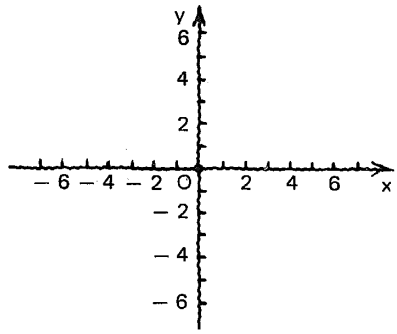


69

Completar la representación gráfica de

y ⩾ 4

x, y $\in \mathcal{R}$

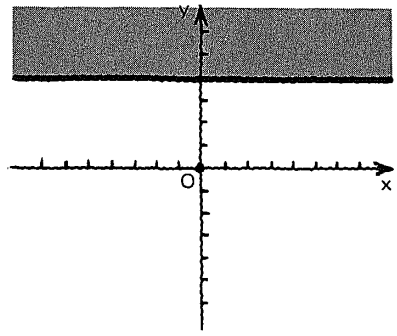


Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de

$y \geqslant 4$

$x, y \in \mathbb{R}$

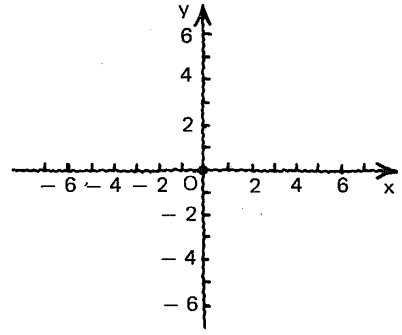


70

Completar la representación gráfica de

$y \leqslant -2$

$x, y \in \mathbb{Z}$

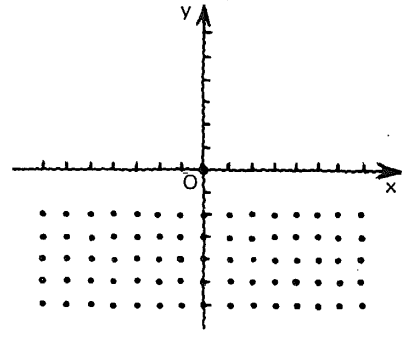


Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de

$y \leqslant -2$

$x, y \in \mathbb{Z}$

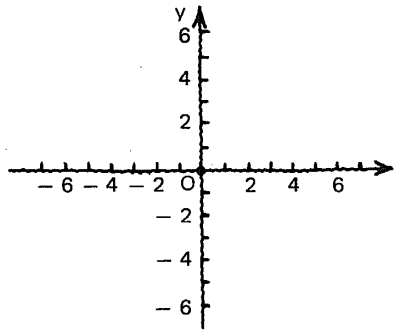


71

Trazar la gráfica de:

$x > 0$

$x, y \in \mathbb{Z}$

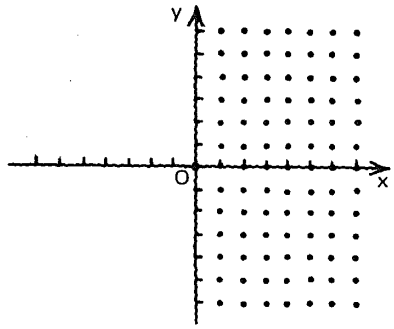


Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de

$x > 0$

$x, y \in \mathbb{Z}$



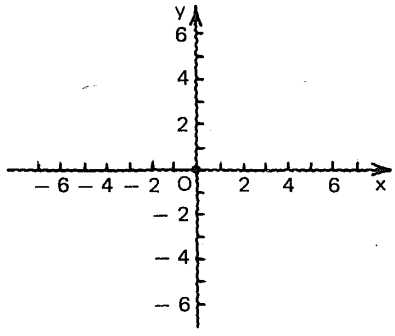
72

Atención.

Trazar la gráfica de la desigualdad

$x \leqslant 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{Z}$

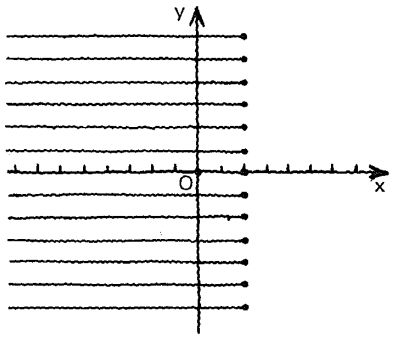


Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de

$x \leqslant 2$

$x \in \mathbb{R} \wedge y \leqslant \mathbb{Z}$

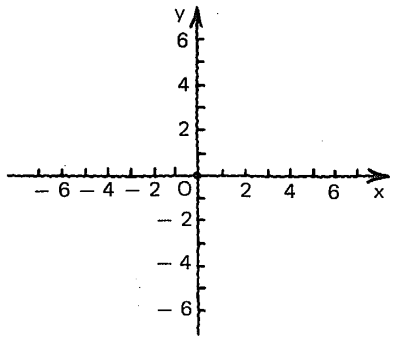


73

Trazar la gráfica cartesiana de

$y > -3$

$x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{Z}$

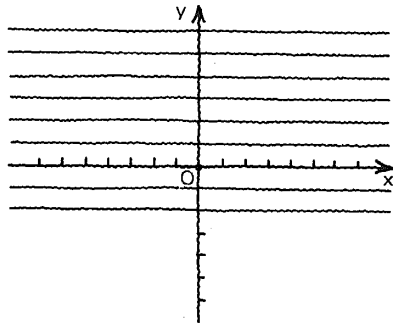


Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica cartesiana de

$y > -3$

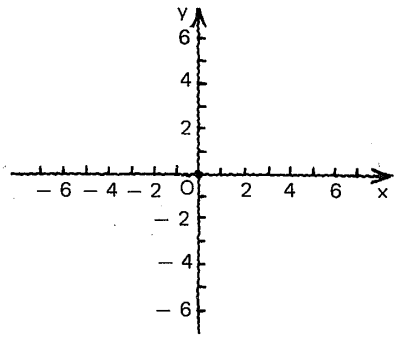
$x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{Z}$



74

Trazar
la
gráfica cartesiana
de

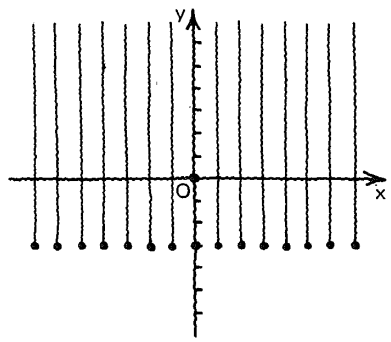
$y \geqslant -3$
$y \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{Z}$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica cartesiana
de

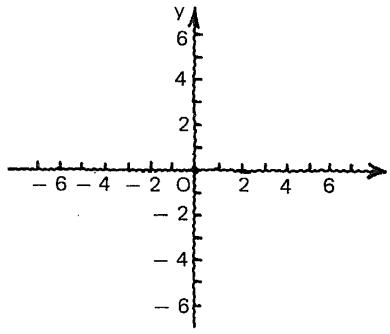
$y \geqslant -3$
$y \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{Z}$



75

Trazar la
gráfica
de

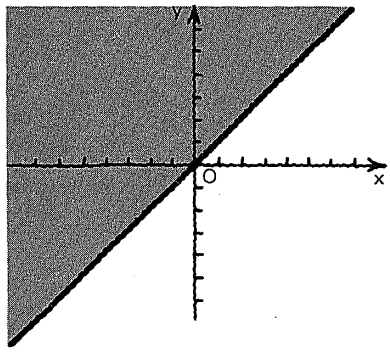
$y \geqslant x$
$x, y \in \mathbb{R}$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica
de

$y \geqslant x$
$x, y \in \mathbb{R}$



2.11.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

76

Queremos determinar
el conjunto solución
de la desigualdad lineal

$$3x + 4y - 12 \geqslant 0 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Para esto
es necesario, en primer
lugar, **transformar**
la desigualdad dada en una
desigualdad equivalente
de la forma:

$$y \gtrless mx + b$$

77

Recordemos estas dos reglas para la transformación de desigualdades:

1. Propiedad **aditiva:**

   - Si $x < y$ entonces $x + a < y + a$

2. Propiedad **multiplicativa:**

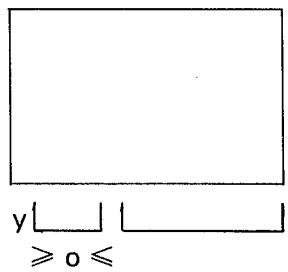
   - Si $x < y$ e $a > 0$ entonces $x \cdot a < y \cdot a$
     Si a es positiva, no cambia el sentido de la desigualdad.

   - Si $x < y$ e $a < 0$ entonces $x \cdot a > y \cdot a$
     Si a es negativa, cambia el sentido de la desigualdad.

78

$$3x + 4y - 12 \geqslant 0$$
$$x, y \in \mathcal{R}$$

Transformaciones:



$$4y \geqslant -3x + 12$$

$$y \geqslant -\frac{3x}{4} + 3$$

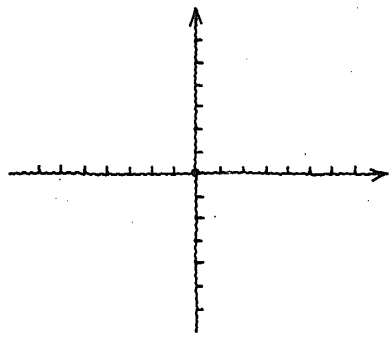
79

Enseguida trazaremos la gráfica de

$$y = -\frac{3x}{4} + 3$$
$$x, y \in \mathcal{R}$$

Que servirá de **referencia** para el trazo de la gráfica de

$$y \geqslant -\frac{3x}{4} + 3$$
$$x, y \in \mathcal{R}$$

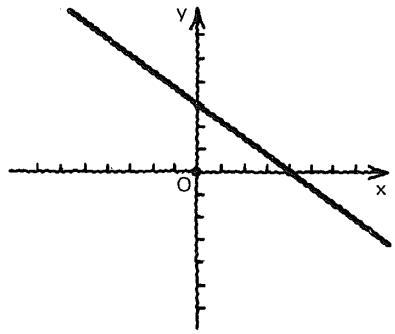


Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de

$$y = -\frac{3x}{4} + 3$$

$x, y \in \mathbb{R}$



80

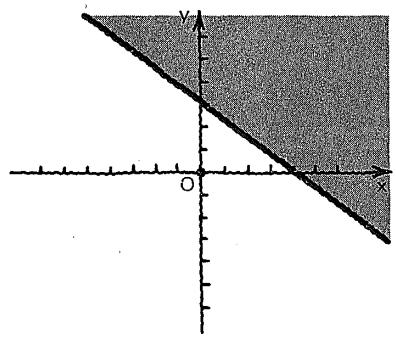
Gráfica de

$$y \geqslant -\frac{3x}{4} + 3$$

$x, y \in \mathbb{R}$

o de

$$3x + 4y - 12 \geqslant 0$$

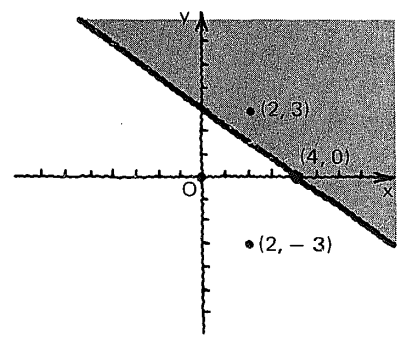


81

Comprobación por sustitución de algunos pares ordenados en la desigualdad original

$3x + 4y - 12 \geqslant 0$:

- $3(2) + 4(3) - 12 \geqslant 0$
  $6 + 12 - 12 \geqslant 0$
  $6 \geqslant 0$ (2, 3) sí satisface
- $3(4) + 4(0) - 12 \geqslant 0$
  $-12 \geqslant 0$
  $0 \geqslant 0$ (4, 0) sí satisface
- $3(2) + 4(-3) - 12 \geqslant 0$
  $6 - 12 - 12 \geqslant 0$
  $-18 \geqslant 0$ (2, −3) no satisface

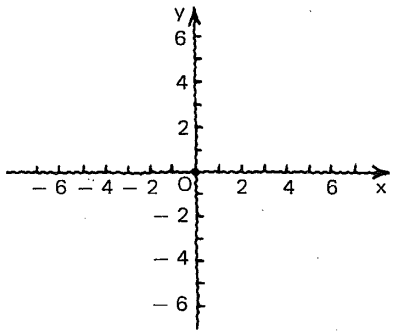


82

Trazar la gráfica de

$5x - 3x < 12$

$x, y \in \mathcal{R}$



Respuesta en el cuadro siguiente

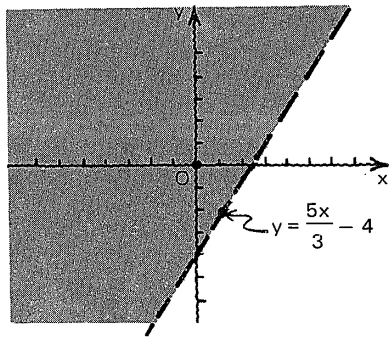
Representación gráfica de

$5x - 3y < 12$

$x, y \in \mathcal{R}$

o de la desigualdad equivalente

$$y > \frac{5x}{3} - 4$$



83

Comprobación:

$5x - 3y < 12$

$x, y \in \mathcal{R}$

• $(2, 1) \longrightarrow 5(2) - 3(1) < 12$

$10 - 3 < 12$

$7 < 12$ ◀ (2, 1) sí satisface

• $(3, 1) \longrightarrow 5(3) - 3(1) < 12$

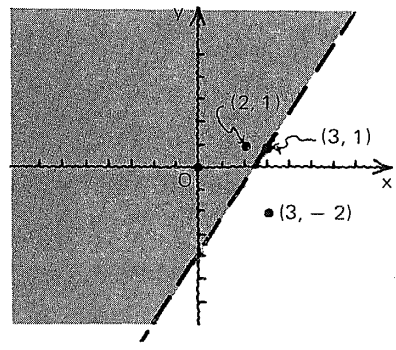
$15 - 3 < 12$

$12 < 12$ ◀ (3, 1) no satisface

• $(3, -2) \longrightarrow 5(3) - 3(-2) < 12$

$15 + 6 < 12$

$21 < 12$ ◀ (3, – 2) no satisface



2.11.2.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.11.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *representar gráficamente* una desigualdad de la forma:

  $y \gtrless mx + b;$

- *representar gráficamente* una desigualdad de alguna de las formas:

  $ax + by \gtrless C$

  o

  $Ax + By + C \gtrless 0.$

11.3

Sistemas de desigualdades lineales.
Solución gráfica

84

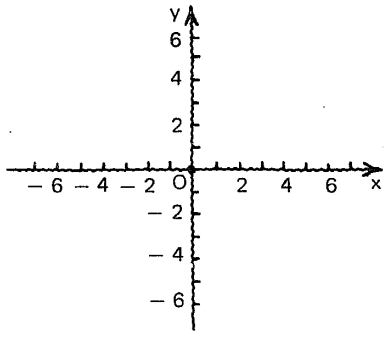
Una desigualdad lineal
con dos variables:

$$3x - 2y - 8 \geqslant 0$$
$$x, y \in \mathcal{R}$$

85

$$3x - 2y - 8 \geqslant 0$$
$$x, y \in \mathcal{R}$$

Tracemos su gráfica.



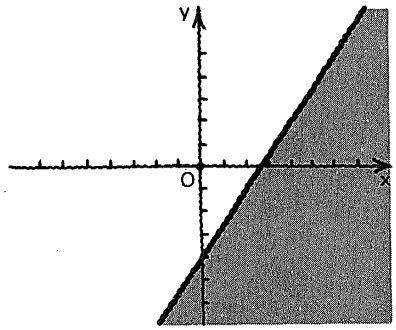
Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica de

$3x - 2y - 8 \geqslant 0$
$x, y \in \mathbb{R}$

o de la desigualdad equivalente

$y \leqslant \frac{3x}{2} - 4$



86

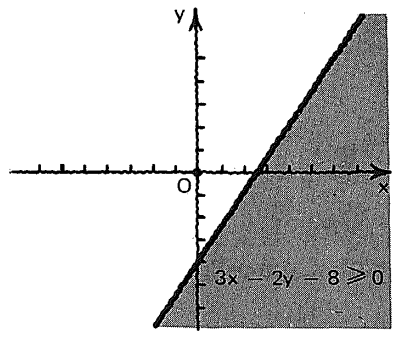
Otra desigualdad lineal con dos variables

$x + 2y - 2 \geqslant 0$
$x, y \in \mathbb{R}$

87

Tracemos sobre el mismo plano cartesiano la gráfica de esta otra desigualdad:

$x + 2y - 2 \geqslant 0$
$x, y \in \mathbb{R}$



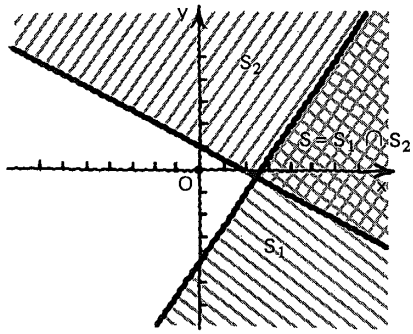
Respuesta en el cuadro siguiente

La región ▨ representa el conjunto solución del sistema

$3x - 2y - 8 \geqslant 0$ ①

$\wedge$

$x + 2y - 2 \geqslant 0$ ②



88

$3x - 2y - 8 \geqslant 0$ ①

$\wedge$

$x + 2y - 2 \geqslant 0$ ②

Cualquier punto en la región □ no satisface ninguna de las desigualdades.

Por ejemplo: **(− 3, 1)**

$3(-3) - 2(1) - 8 \geqslant 0$

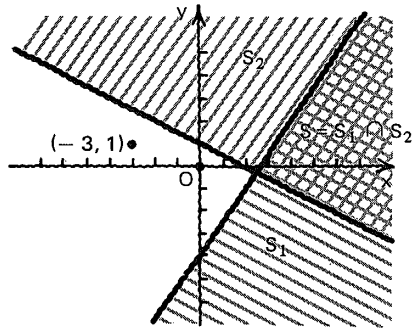
$-9 - 2 - 8 \geqslant 0$

$-19 \geqslant 0$ ◀ No satisface ①

$-3 + 2(1) - 2 \geqslant 0$

$-3 + 2 - 2 \geqslant 0$

$-3 \geqslant 0$ ◀ No satisface ②



89

$3x - 2y - 8 \geqslant 0$ ①

$\wedge$

$x + 2y - 2 \geqslant 0$ ②

Cualquier punto en la región ▨ satisface la desigualdad ① pero no la ②

Por ejemplo: **(4, − 2)**

$3(4) - 2(-2) - 8 \geqslant 0$

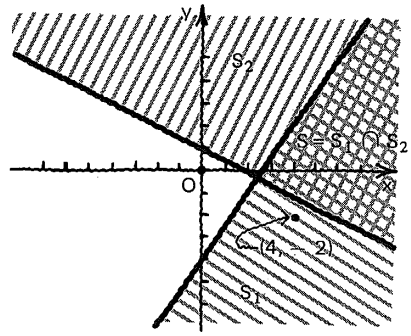
$12 + 4 - 8 \geqslant 0$

$8 \geqslant 0$ ◀ Sí satisface ①

$4 + 2(-2) - 2 \geqslant 0$

$4 - 4 - 2 \geqslant 0$

$-2 \geqslant 0$ ◀ No satisface ②



90

$3x - 2y - 8 \geqslant 0$ ①

$x + 2y - 2 \geqslant 0$ ②

Cualquier punto en la región satisface la desigualdad ② pero no la ①.

Por ejemplo: **(3, 3)**

$3(3) - 2(3) - 8 \geqslant 0$

$9 - 6 - 8 \geqslant 0$

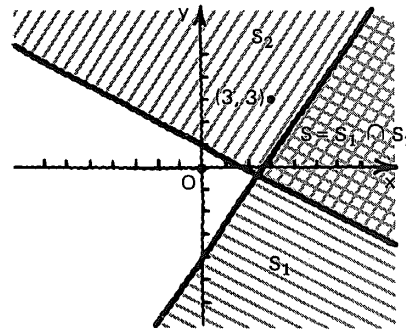
$-5 \geqslant 0$ ◀ No satisface ①

$3 + 2(3) - 2 \geqslant 0$

$3 + 6 - 2 \geqslant 0$

$9 - 2 \geqslant 0$

$7 \geqslant 0$ ◀ Sí satisface ②



91

$3x - 2y - 8 \geqslant 0$ ①

$x + 2y - 2 \geqslant 0$ ②

Cualquier punto en la región satisface las dos desigualdades.

Por ejemplo: **(5, 2)**

$3(5) - 2(2) - 8 \geqslant 0$

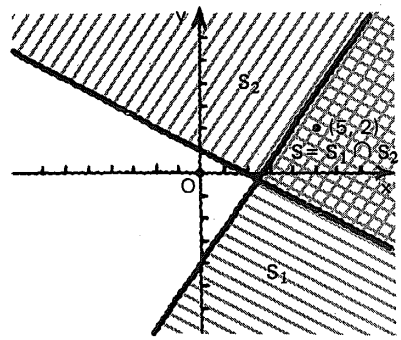
$15 - 4 - 8 \geqslant 0$

$3 \geqslant 0$ ◀ Sí satisface ①

$5 + 2(2) - 2 \geqslant 0$

$5 + 4 - 2 \geqslant 0$

$7 \geqslant 0$ ◀ Sí satisface ②



92

Consideremos una desigualdad lineal más:

$y \geqslant 2$

$x, y \in \mathbb{R}$

93

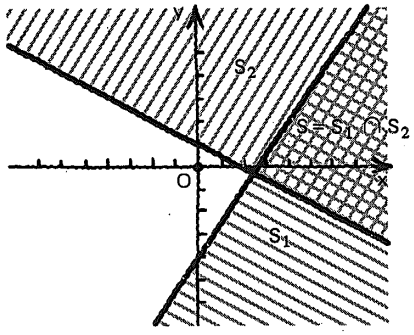
Tracemos la gráfica de

$y \geqslant 2$

$x, y \in \mathbb{R}$

e indiquemos la región que representa el conjunto solución del sistema

$$3x - 2y - 8 \geqslant 0 \quad ①$$
$$x + 2y - 2 \geqslant 0 \quad ②$$
$$y \geqslant 2 \quad ③$$

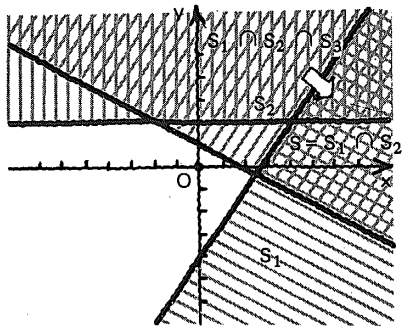


Respuesta en el cuadro siguiente

Todos los puntos de la región constituyen el conjunto solución del sistema

$$3x - 2y - 8 \geqslant 0 \quad ①$$
$$x + 2y - 2 \geqslant 0 \quad ②$$
$$y \geqslant 2 \quad ③$$

$x, y \in \mathbb{R}$

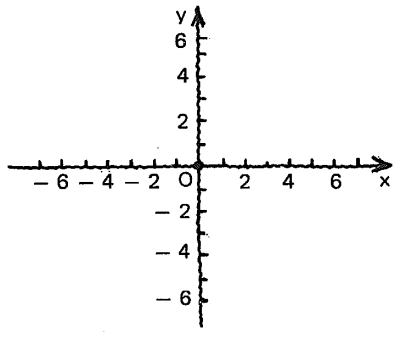


94

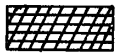
De manera similar, determinemos gráficamente el conjunto solución del sistema

$$2x + 3y + 9 > 0$$
$$y < 0$$
$$x \leqslant 0$$

$x, y \in \mathbb{R}$



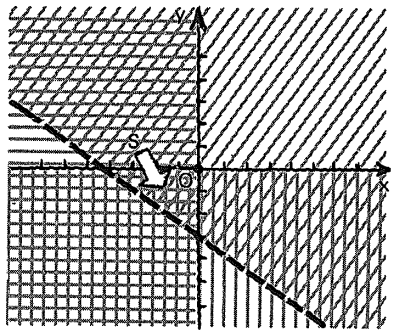
Respuesta en el cuadro siguiente

La región 

representa el
conjunto solución
del
sistema

$$2x + 3y + 9 > 0 \quad ①$$
$$\wedge \quad y < 0 \quad ②$$
$$\wedge \quad x \leqslant 0 \quad ③$$

$x, y \in \mathbb{R}$

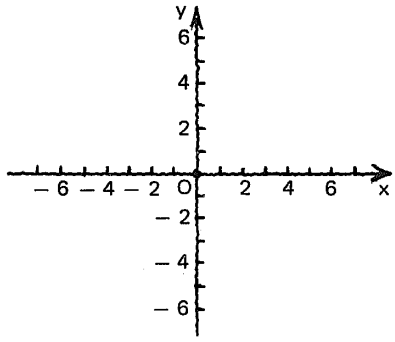


95

Determinemos
gráficamente
el
conjunto solución
del
sistema

$$x - 3y + 6 < 0 \quad ①$$
$$\wedge$$
$$x - 3y - 3 > 0 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{R}$

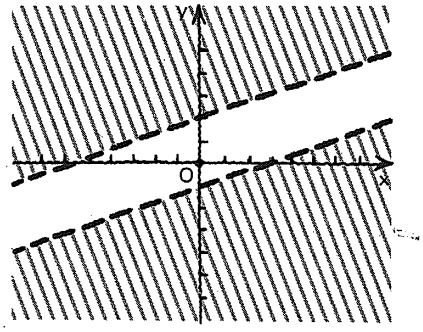


Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$x - 3y + 6 < 0 \quad ①$$
$$\wedge$$
$$x - 3y - 3 > 0 \quad ②$$

$x, y \in \mathbb{R}$

$S = \phi$



2.11.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.11.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar gráficamente* el conjunto solución de un sistema dado de desigualdades lineales de la forma:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 \leqslant 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 \leqslant 0$$
$$A_3 x + B_3 y + C_3 \leqslant 0$$
$$\downarrow$$
$$\text{etc.}$$

11.4

Ecuaciones y desigualdades de primer grado con una variable.
Solución gráfica

96

Una

ecuación de primer grado con una variable:

$$3(x + 4) - 5x = 4 + 2x$$

$$x \in \mathbb{R}$$

97

$$3(x + 4) - 5x = 4 + 2x$$

Transformemos esta ecuación en una ecuación equivalente de la forma

$$mx + b = 0:$$

Transformaciones

$$3x + 12 - 5x = 4 + 2x$$
$$-2x + 12 = 4 + 2x$$
$$-2x + 12 - 2x - 4 = 0$$
$$-4x + 8 = 0$$
$$4x - 8 = 0$$

98

$$3(x + 4) - 5x = 4 + 2x$$

Ecuación equivalente de la forma $mx + b = 0$:

$x \in \mathbb{R}$

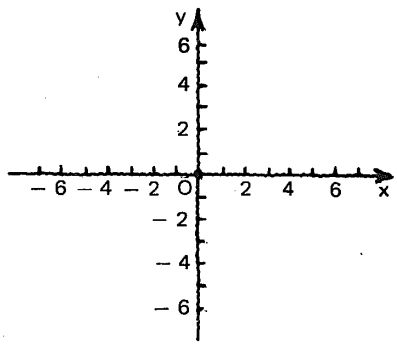
$$4x - 8 = 0$$

99

$$4x - 8 = 0$$
$x \in \mathbb{R}$

Tracemos ahora, la gráfica de:

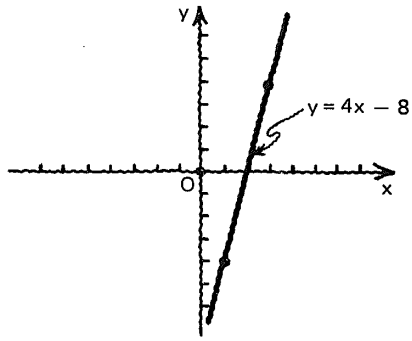
$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R} \wedge y = 4x - 8\}$



x	y
1	
3	

Respuesta en el cuadro siguiente

x	y
1	– 4
3	4



Observemos que en la intersección de la recta con el eje de las x, se tiene:

$y = 4x - 8 = 0$

condición que se satisface con

$x =$ _____

2

100

La abscisa del punto de intersección de la recta

y = 4x − 8

con el eje de las x representa al satisfactor de la ecuación

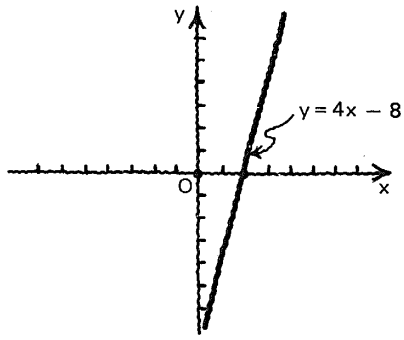
4x − 8 = 0

En efecto:

$4(2) - 8 = 0$

$8 - 8 = 0$

$0 = 0$ ◀ PCV



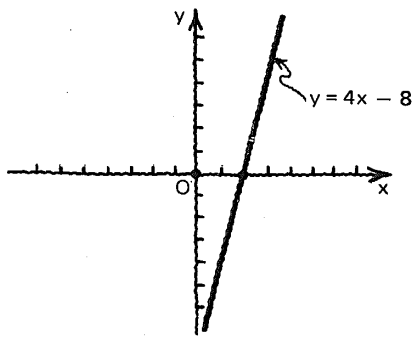
101

Sabemos que el conjunto solución de la ecuación

4x − 8 = 0

puede ser escrito así:

S = {2}



102

Señalar la opción correcta y completar,

$S = \{2\}$

es/no es el conjunto solución de la ecuación

$3(x + 4) - 5x = 4 + 2x \quad x \in \mathbb{R}$

puesto que:

_____

es

$3(2 + 4) - 5(2) = 4 + 2(2)$

$18 - 10 = 4 + 4$

$8 = 8$

▲

PCV

103

En general,
la abscisa del punto de intersección
de la recta representativa de la función

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \wedge y = mx + b\}$$

con el eje de las x
es **el satisfactor**
de la ecuación

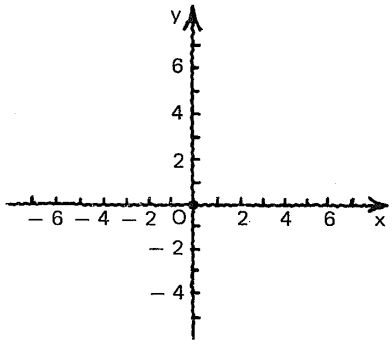
$$mx + b = 0 \qquad x \in \mathcal{R}$$

o de cualquier ecuación
equivalente a esta.

104

Determinar
gráficamente
el
conjunto solución
de la
ecuación

$$5x - 3(x - 2) = -x \qquad x \in \mathcal{R}$$



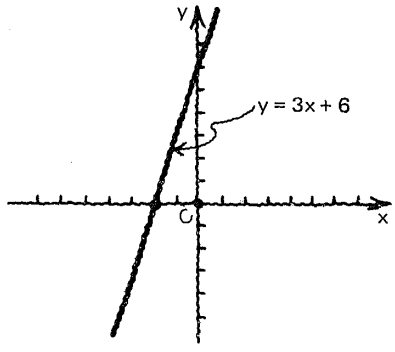
Respuesta
en el
cuadro siguiente

Ecuación equivalente
de la forma $y = ax + b$:

$$3x + 6 = 0$$

Conjunto solución:

$$S = \{-2\}$$



2.11.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

105

Ahora,
consideremos una

desigualdad de primer grado con una variable:

$$3(x + 4) - 5x \geqslant 4 + 2x \qquad x \in \mathbb{R}$$

106

$$3(x + 4) - 5x \geqslant 4 + 2x \qquad x \in \mathbb{R}$$

Transformemos
esta
desigualdad
en otra
equivalente
de la forma:

$mx + b \leqslant 0$

$$3x + 12 - 5x \geqslant 4 + 2x$$
$$-2x + 12 \geqslant 4 + 2x$$
$$-2x + 12 - 4 - 2x \geqslant 0$$
$$-4x + 8 \geqslant 0$$
$$4x - 8 \leqslant 0$$

107

$$3(x + 4) - 5x \geqslant 4 + 2x \qquad x \in \mathbb{R}$$

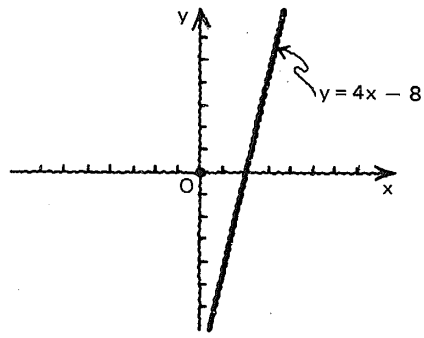
$$\downarrow$$

$$4x - 8 \leqslant 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

108

Observemos con atención y tracemos la gráfica del conjunto solución de la desigualdad:

$$4x - 8 \leqslant 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$



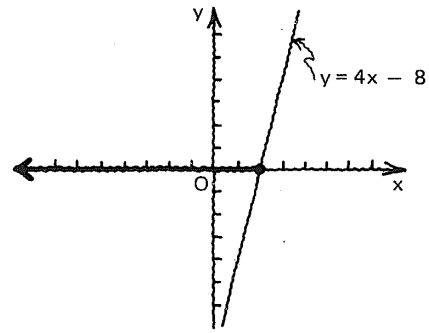
Respuesta en el cuadro siguiente

$3(x + 4) - 5x \geqslant 4 + 2x \longrightarrow 4x - 8 \leqslant 0$

$S = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \leqslant 2\}$

o bien:

$S = (-\infty, 2] \qquad x \in \mathbb{R}$



109

Comprobación:

$$3(x + 4) - 5x \geqslant 4 + 2x$$

$x = 0 \longrightarrow 3(0 + 4) - 5(0) \geqslant 4 + 2(0)$

$12 \geqslant 4$ ◂ Sí satisface

$x = 2 \longrightarrow 3(2 + 4) - 5(2) \geqslant 4 + 2(2)$

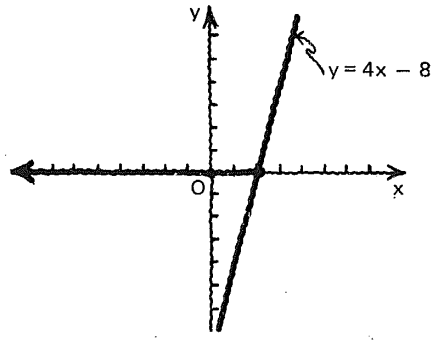
$3x6 - 10 \geqslant 4 + 4$

$18 - 10 \geqslant 8$

$8 \geqslant 8$ ◂ Sí satisface

$x = 3 \longrightarrow 3(3 + 4) - 5(3) \geqslant 4 + 2(3)$

$6 \geqslant 10$ ◂ No satisface

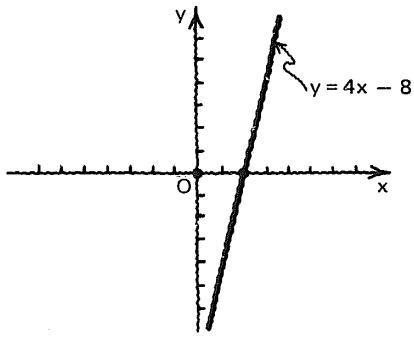


110

Trazar la gráfica del conjunto solución de

$4x - 8 \geqslant 0$

$x \in \mathbb{R}$



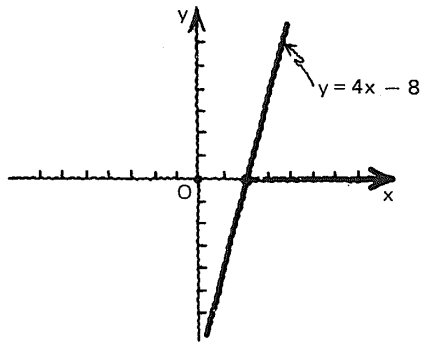
Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica del conjunto solución de

$4x - 8 \geqslant 0$

$x \in \mathbb{R}$

$S = [2, +\infty)$

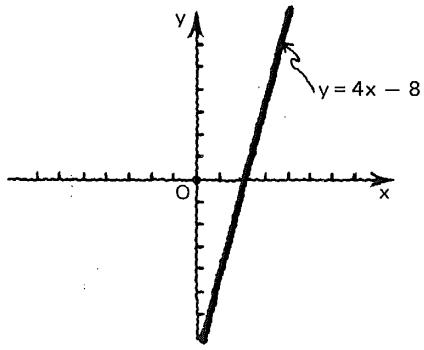


111

Trazar la gráfica del conjunto solución de

$4x - 8 < 0$

$x \in \mathbb{R}$



Respuesta en el cuadro siguiente

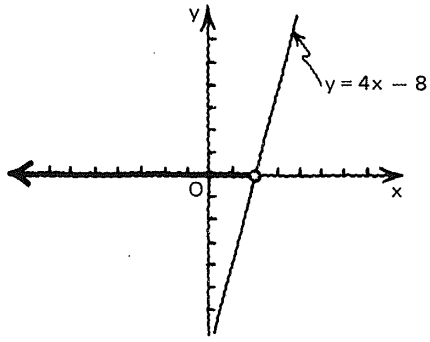
Gráfica del conjunto solución de

$4x - 8 < 0$

$x \in \mathbb{R}$

$S = (-\infty, 2)$

$x \in \mathbb{R}$



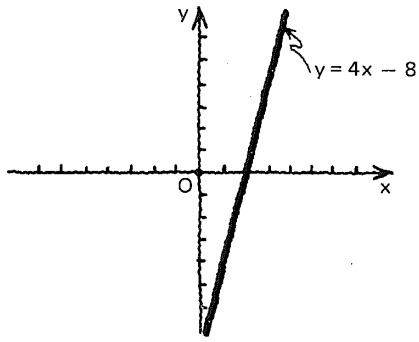
112

Atención.

Trazar la gráfica del conjunto solución de

$4x - 8 > 0$

$x \in \mathbb{Z}$



Respuesta en el cuadro siguiente

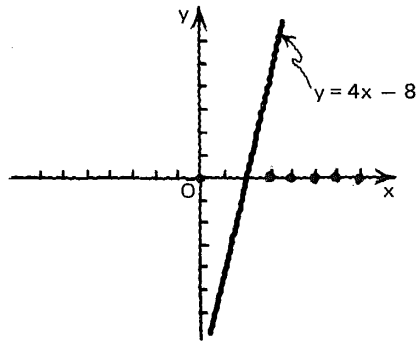
Gráfica del
conjunto solución
de

$4x - 8 > 0$

$x \in \mathbb{Z}$

$S = (2, +\infty)$

$x \in \mathbb{Z}$



2.11.4.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

113

Consideremos ahora un

sistema de dos desigualdades
de primer grado con una variable:

$$x \geqslant 3x + 5 \wedge 4(x - 2) < -1$$

$x \in \mathbb{R}$

Se requiere determinar su

conjunto solución.

114

$$x \geqslant 3x + 5 \quad ①$$
$$\wedge$$
$$4(x - 2) < -1 \quad ②$$

Tomemos la desigualdad ① y expresémosla en la forma

$mx + b \geqslant 0$:

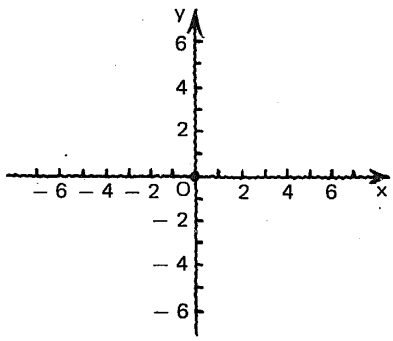
$$x \geqslant 3x + 5$$
$$x - 3x - 5 \geqslant 0$$
$$-2x - 5 \geqslant 0$$
$$2x + 5 \leqslant 0$$

$x \in \mathbb{R}$

115

Determinemos gráficamente el conjunto solución de la desigualdad

$2x + 5 \leqslant 0$
$x \in \mathbb{R}$



Respuesta en el cuadro siguiente

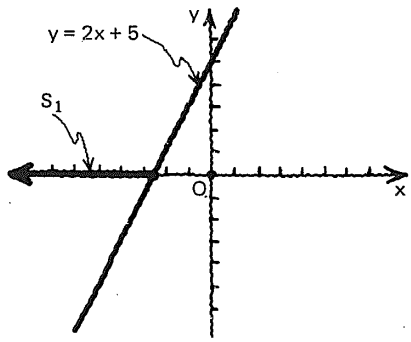
$S_1 = (-\infty, -5/2]$
$x \in \mathbb{R}$

Conjunto solución de:

$2x + 5 \leqslant 0$

o de:

$x \geqslant 3x + 5$
$x \in \mathbb{R}$



116

$$x \geqslant 3x + 5 \quad ①$$
$$\wedge$$
$$4(x - 2) < -1 \quad ②$$

Tomemos la desigualdad ② y expresémosla en la forma

$mx + b \gtrless 0$:

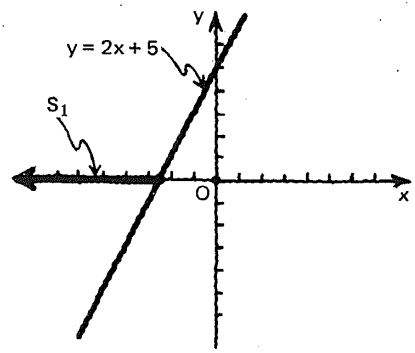
$$4(x - 2) < -1$$
$$4x - 8 < -1$$
$$4x - 8 + 1 < 0$$
$$4x - 7 < 0$$

$x \in \mathbb{R}$

117

Determinemos el conjunto solución de esta nueva desigualdad:

$4x - 7 < 0$
$x \in \mathbb{R}$



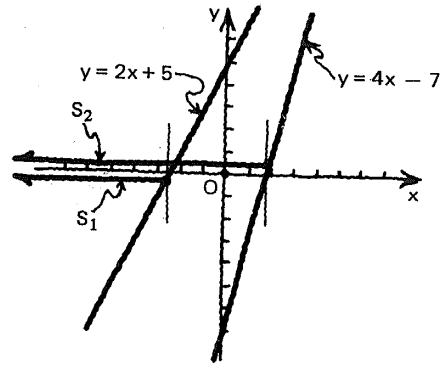
Respuesta en el cuadro siguiente

$S_2 = (-\infty, 7/4)$ $x \in \mathbb{R}$

Tracemos ahora la gráfica del conjunto solución del sistema:

$2x + 5 \leqslant 0 \wedge 4x - 7 < 0$

$x \in \mathbb{R}$

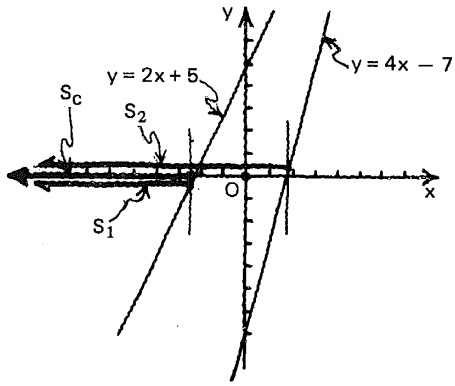


118

Sabemos que:
el conjunto solución S_c
del sistema conjuntivo
deberá ser igual a

$S_1 \cap S_2$.

$S_c = (-\infty, -\frac{5}{2}]$
$x \in \mathbb{R}$

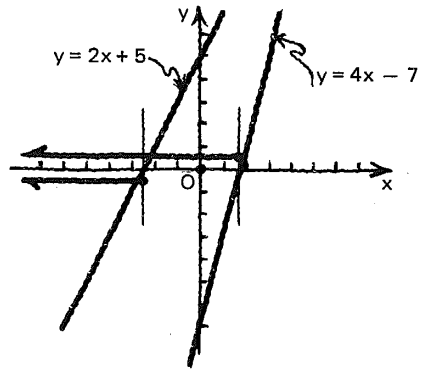


119

Ahora

pongamos mucha
atención al trazar
el conjunto solución
del sistema disyuntivo

$2x + 5 \leqslant 0$
$\vee$
$4x - 7 < 0$
$x \in \mathbb{R}$

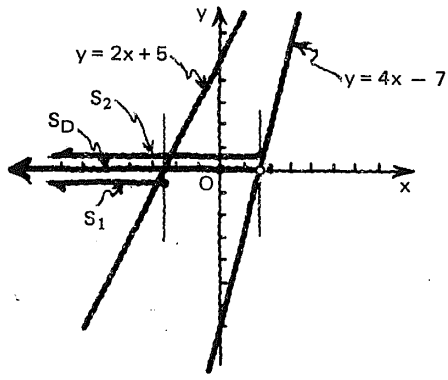


Respuesta
en el
cuadro siguiente

El conjunto solución S_D
del
sistema disyuntivo
deberá ser igual a

$S_1 \cup S_2$.

$S_D = (-\infty, 7/4)$
$x \in \mathbb{R}$



2.11.4.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.11.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar gráficamente* el conjunto solución de una ecuación de primer grado con una variable transformándola previamente en una ecuación equivalente de la forma $ax + b = 0$;

- *determinar gráficamente* el conjunto solución de una desigualdad de primer grado con una variable, transformándola previamente en una desigualdad equivalente de la forma $ax + b \gtrless 0$;

- *determinar gráficamente* el conjunto solución de un sistema conjuntivo o disyuntivo de dos desigualdades de primer grado con una variable.

11.5

Ecuaciones cuadráticas con una variable. Solución gráfica

120

En un módulo anterior aprendimos a representar gráficamente una expresión de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

o $x \in \mathbb{R}$

$$y = ax^2 + bx + c$$

que define a una

función cuadrática.

121

Hemos visto la conveniencia de **transformar** la expresión

$$y = ax^2 + bx + c$$

en otra **equivalente** de la forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$

a fin de facilitar el trazo de la gráfica cartesiana.

122

Estado inicial:

$y = ax^2 + bx + c$

Modelo del estado final:

$y = a(x - h)^2 + k$

Transformaciones:

1. Expresar la igualdad original como el producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

123

Estado intermedio 1:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Modelo del estado final:

$y = a(x - h)^2 + k$

2. Sumar y restar un término t^2 a la expresión que está entre paréntesis, de modo que "se complete" un trinomio cuadrado perfecto:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + t^2 - t^2 + \frac{c}{a}\right)$$

Recordemos que:
t^2 debe ser igual a

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$t^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

124

Estado intermedio 2:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Modelo del estado final:

$y = a(x - h)^2 + k$

3. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto resultante.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

125

Estado intermedio 3:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

Modelo del estado final

$$y = a(x - h)^2 + k$$

4. Efectuar las transformaciones faltantes, de acuerdo con el modelo.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

126

Estado final:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Modelo del estado final:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

$h = -\frac{b}{2a}$

$k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

127

Recordemos que cualquiera de las dos expresiones representa una **parábola** cuyo **vértice** es el punto

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - h)^2 + k$$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$V = \left(\underbrace{-\frac{b}{2a}}_{h}, \underbrace{-\frac{b^2 - 4ac}{4a}}_{k}\right)$$

128

Entonces, para trazar la gráfica cartesiana correspondiente a

$$y = a(x - h)^2 + k$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

Trazamos la gráfica de

$$y = ax^2$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

y la "trasladamos" de modo que el vértice "caiga" sobre el punto (h,k).

129

Utilizando el procedimiento bosquejado, vamos a trazar la gráfica cartesiana de

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

130

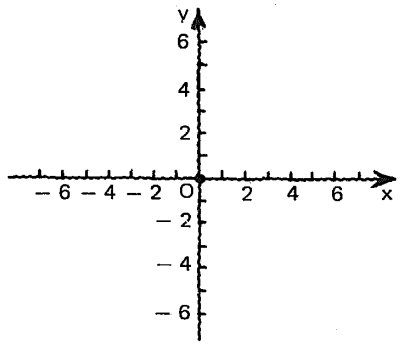
Para trazar la gráfica de:

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2$$

Trazaremos primero la gráfica de:

$$y = \frac{x^2}{4}$$

x	y
− 2	
− 1	
0	
1	
2	

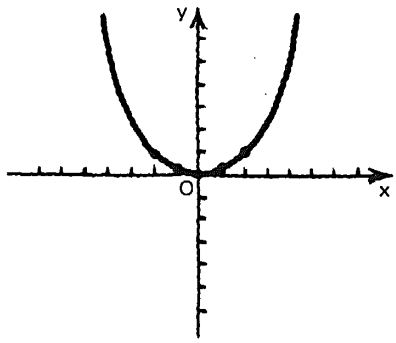


Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de

$$y = \frac{x^2}{4}$$

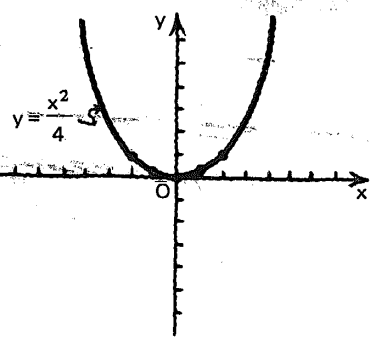
x	y
− 2	1
− 1	1/4
0	0
1	1/4
2	1



131

Ahora determinaremos el vértice de la parábola

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2$$



$$h = -\frac{b}{2a} = \square$$

$$k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \square$$

$$V = (\square, \square)$$

$h = 2$

$k = -3$

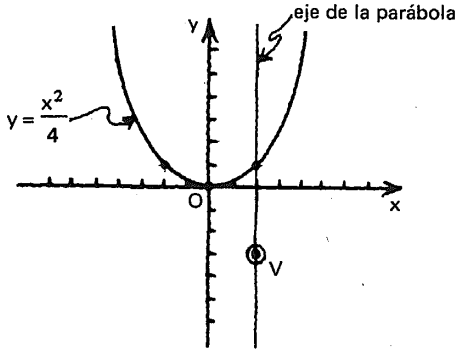
$V = (2, -3)$

132

Ubiquemos el vértice

$V = (2, -3)$

en el plano cartesiano.



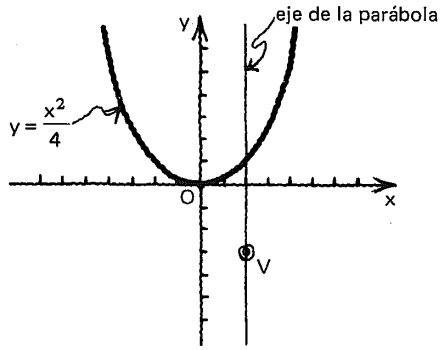
133

Finalmente, "traslademos" la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{4}$$

de modo que su vértice coincida con el punto

$V = (2, -3)$

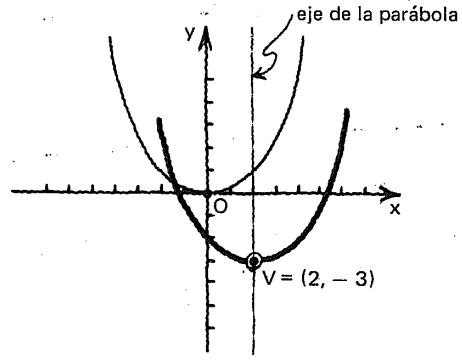


Respuesta en el cuadro siguiente

El resultado es la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2$$

$x, y \in \mathbb{R}$

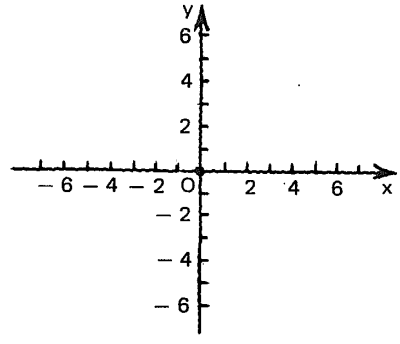


134

Utilizando el mismo procedimiento, tracemos la gráfica de

$$y = -x^2 + 2x + 4$$

$x, y \in \mathbb{R}$

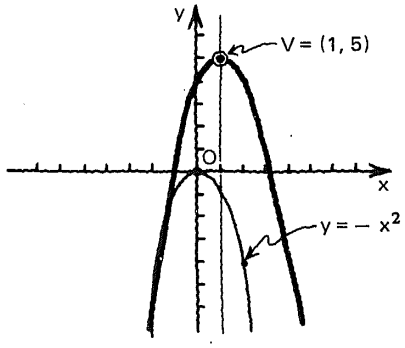


Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de

$y = -x^2 + 2x + 4$

$x, y \in \mathbb{R}$

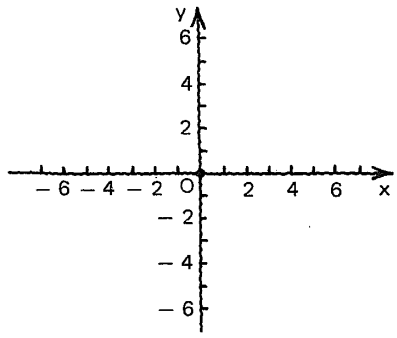


135

Trazar la gráfica de

$y = 2x^2 + 8x + 8$

$x, y \in \mathbb{R}$

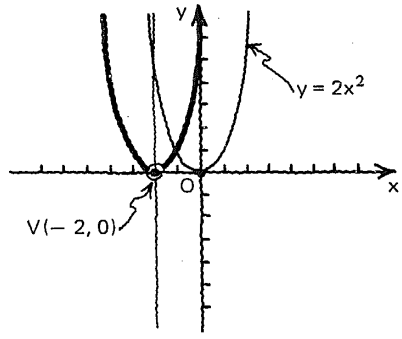


Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de

$y = 2x^2 + 8x + 8$

$x, y \in \mathbb{R}$

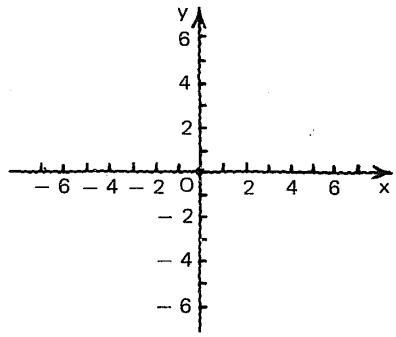


136

Trazar la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + \frac{37}{8}$$

$x, y \in \mathbb{R}$

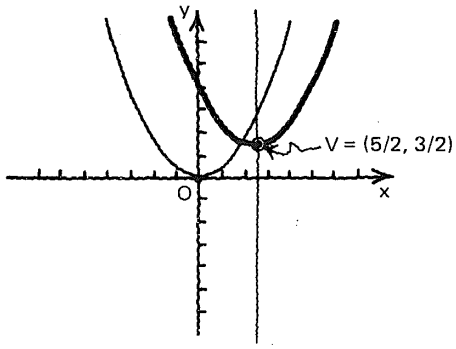


Respuesta en el cuadro siguiente

Gráfica de

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + \frac{37}{8}$$

$x, y \in \mathbb{R}$



2.11.5.1

Práctica adicional, si se considera necesario.

137

Ahora bien,

recordemos que
la forma general de una

ecuación de segundo grado
o cuadrática

con una variable, es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

138

Con un poco de atención
podemos darnos cuenta de que

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

representa la

intersección

de la parábola

$$y = ax^2 + bx + c \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

con el eje de las x.

139

Ejemplo.

Si queremos representar gráficamente
el **conjunto solución de** la ecuación

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

empecemos por
trazar la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

lo cual hemos hecho ya en un ejercicio anterior.

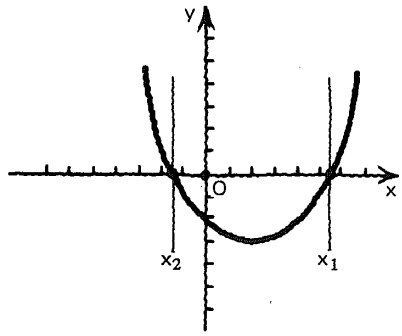
140

Las abscisas de los puntos de intersección de la parábola

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2$$

con el eje de las x son los satisfactores de la ecuación

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 = 0$$



141

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 = 0$$

Ecuación equivalente con coeficientes enteros:

$x^2 - 4x - 8 = 0$

Solución algebraica:

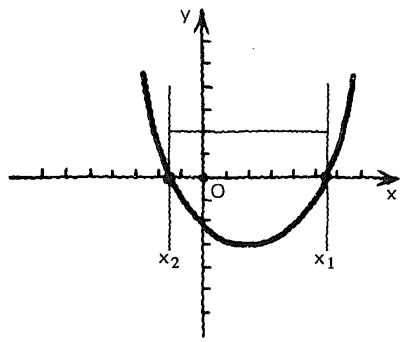
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 32}}{2}$$

$x = 2 \pm 2\sqrt{3}$

$x_1 \doteq 5.46$

$x_2 \doteq -1.46$

$S \doteq \{5.46, -1.46\}$

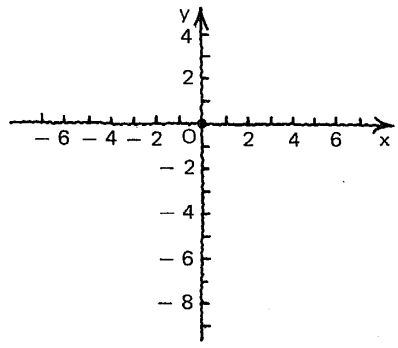


142

Con esta idea en mente, determinar gráficamente el conjunto solución de la ecuación

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$x \in \mathbb{R}$



Respuesta en el cuadro siguiente

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x \in \mathbb{R}$

Algebraicamente obtenemos:

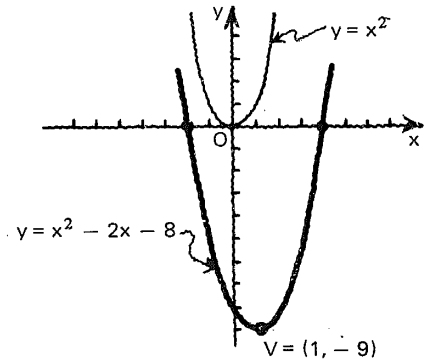
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$x = 1 \pm 3$

$x_1 = 4$

$x_2 = -2$

$S = \{4, -2\}$

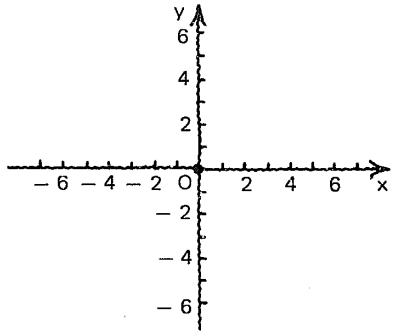


143

Determinar gráficamente el conjunto solución de la ecuación

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$x, y \in \mathbb{R}$



Respuesta en el cuadro siguiente

$x^2 - 4x + 4 = 0$

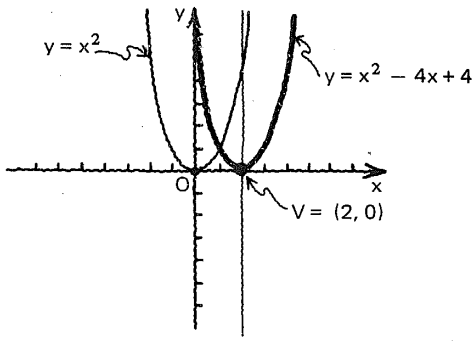
$x \in \mathbb{R}$

Algebraicamente obtenemos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$x_1 = x_2 = 2$

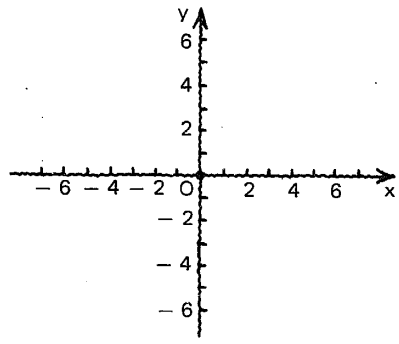
$S = \{2\}$



144

Determinar gráficamente el conjunto solución de la ecuación

$$x^2 + 2 = 0 \qquad x \in \mathcal{R}$$



Respuesta en el cuadro siguiente

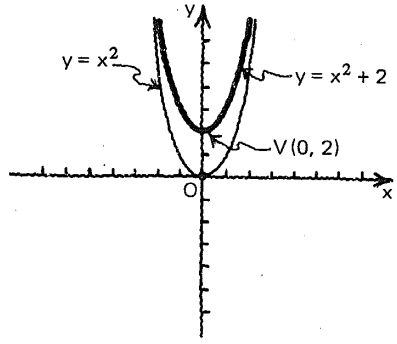
$$x^2 + 2 = 0 \qquad x \in \mathcal{R}$$

Algebraicamente obtenemos:

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

no pertenece a $\mathcal{R}$; por lo tanto,

$$S = \phi$$



2.11.5.2

Práctica adicional, si se considera necesario.

2.11.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar gráficamente* el conjunto solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, comparando los resultados obtenidos con los determinados por medio de la fórmula cuadrática.

11.6

Desigualdades cuadráticas con una variable.
Solución gráfica

145

La forma general de una

desigualdad cuadrática

con una variable es:

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0$$

146

Consideremos, por ejemplo, la desigualdad cuadrática

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 \geqslant 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

y observemos con atención la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

que ya hemos trazado.

147

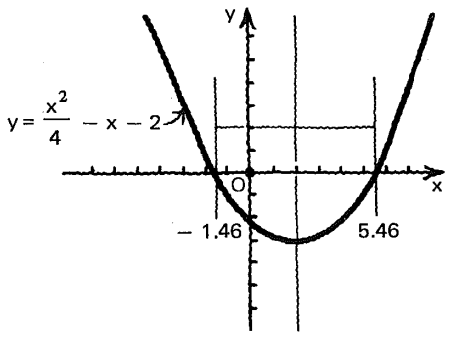
Atención.

$$y = \frac{x^2}{4} - x - 2$$

Intentaremos trazar la gráfica del conjunto solución de la desigualdad:

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 \geqslant 0$$

$x \in \mathbb{R}$



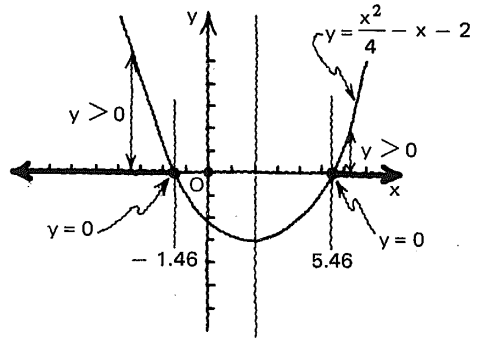
Respuesta en el cuadro siguiente

$$S = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge (x \leqslant -1.46 \vee x \geqslant 5.46)\}$$

o bien,

$$S = (-\infty, -1.46] \cup [5.46, +\infty)$$

$x \in \mathbb{R}$



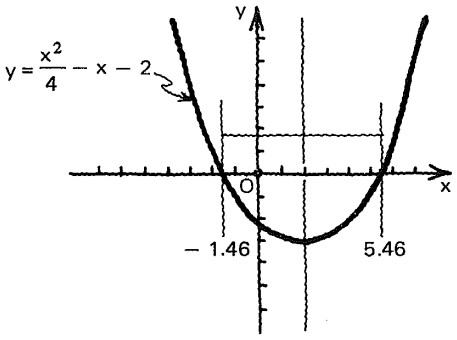
148

Intentemos, ahora,

trazar la gráfica del conjunto solución de

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 \leqslant 0$$

$x \in \mathbb{R}$



Respuesta en el cuadro siguiente

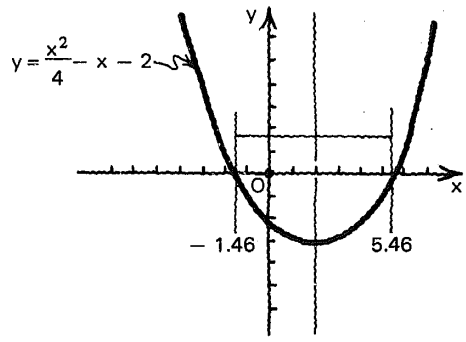
Conjunto solución de:

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 \leqslant 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$S = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge -1.46 \leqslant x \leqslant 5.46\}$

o bien:

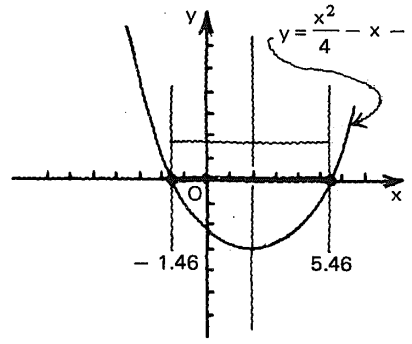
$S = [-1.46, 5.46] \qquad x \in \mathbb{R}$



149

Trazar la gráfica del conjunto solución de

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 > 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$



Respuesta en el cuadro siguiente

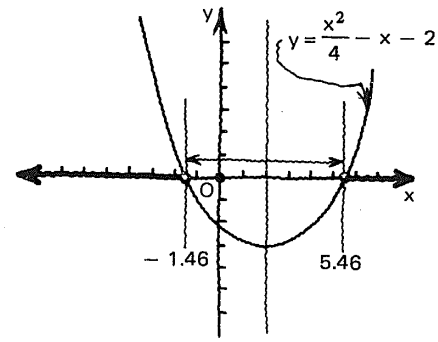
Conjunto solución de:

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 > 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$S = \{x|x \in \mathbb{R} \wedge (x < -1.46 \vee x > 5.46)\}$

o bien:

$S = (-\infty, -1.46) \cup (5.46, +\infty) \qquad x \in \mathbb{R}$



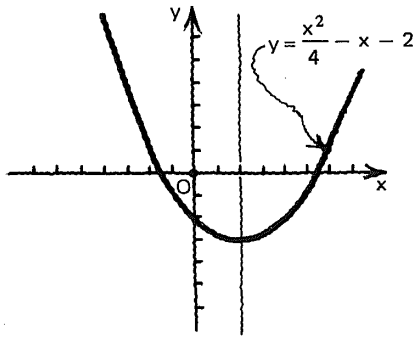
150

Atención.

Trazar la gráfica del conjunto solución de

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 < 0$$

$x \in \mathbb{I}'$



Respuesta en el cuadro siguiente

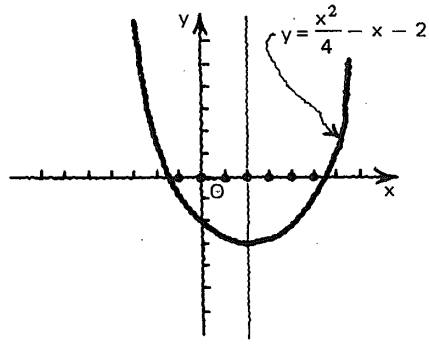
Conjunto solución de:

$$\frac{x^2}{4} - x - 2 < 0 \qquad x \in \mathbb{I}$$

$S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leqslant x \leqslant 5\}$

o bien:

$S = [-1, 5] \qquad x \in \mathbb{Z}$

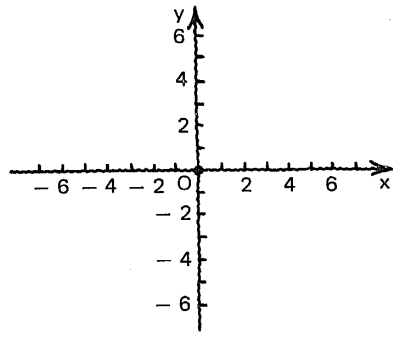


151

Determinar gráficamente el conjunto solución de la desigualdad

$$6x^2 - 7x < 3$$

$x \in \mathbb{R}$



Respuesta en el cuadro siguiente

Desigualdad equivalente de la forma

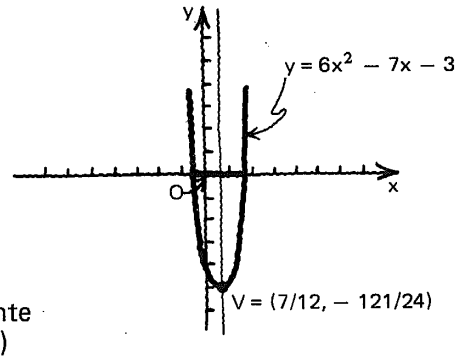
$ax^2 - bx + c \gtrless 0$:

$6x^2 - 7x - 3 < 0$

$x \in \mathbb{R}$

$S = \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$

(calculado algebraicamente y dado para verificación)

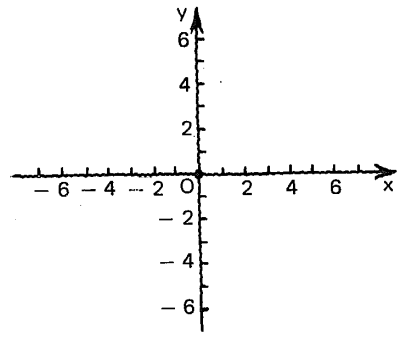


152

Determinar gráficamente el conjunto solución de la desigualdad:

$x^2 - 6x + 11 \geqslant 0$

$x \in \mathbb{R}$



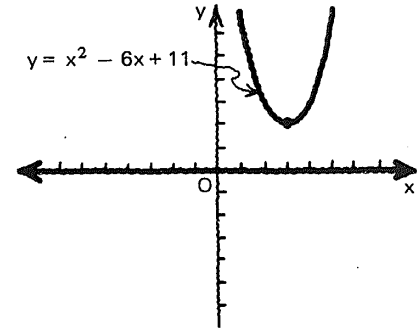
Respuesta en el cuadro siguiente

Observar esto con atención.

$S = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 6x + 11 \geqslant 0\} = \mathbb{R}$

o bien:

$S = (-\infty, +\infty)$ $x \in \mathbb{R}$



153

Conjunto solución de

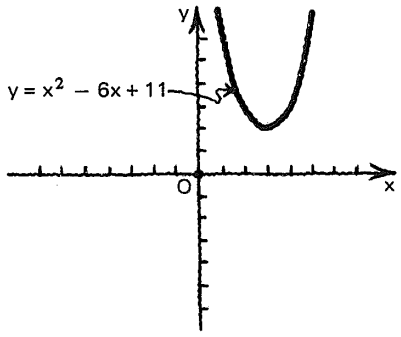
$$x^2 - 6x + 11 < 0$$
$$x \in \mathbb{R}$$

S = ⌊_____⌋

o bien

S = ⌊_____⌋

(expresado como intervalo)



Respuesta en el cuadro siguiente

Atención.

$x^2 - 6x + 11 < 0$

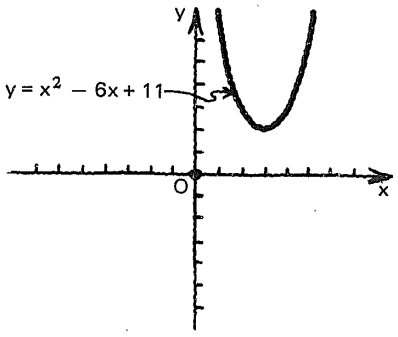
$x \in \mathbb{R}$

$S = \phi$

o bien:

S = ( )

(intervalo vacío)



2.11.6.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

154

Ahora, queremos
determinar gráficamente
el conjunto solución de un

sistema de dos desigualdades cuadráticas con una variable:

$$x^2 + 4x \leqslant -1 \wedge x^2 + 2x \leqslant 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

155

$$x^2 + 4x \leqslant -1 \quad (1)$$
$$\wedge$$
$$x^2 + 2x \leqslant 1 \quad (2)$$
$$(x \in \mathbb{R})$$

Tomemos, en primer lugar, la desigualdad (1)
y expresémosla como una desigualdad
equivalente de la forma

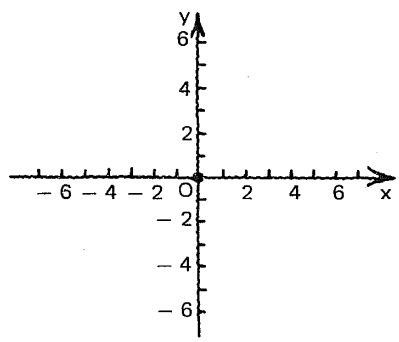
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$:

$x^2 + 4x + 1 \leqslant 0$

156

Ahora,
tracemos la gráfica de

$y = x^2 + 4x + 1$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

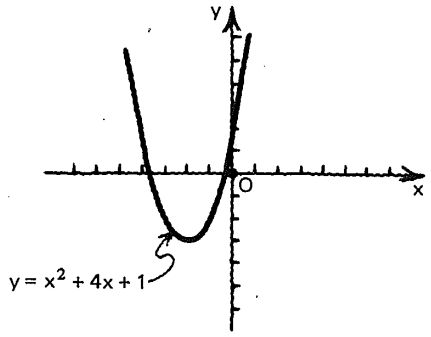
Con la gráfica de

$$y = x^2 + 4x + 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

como referencia, podemos trazar la gráfica del conjunto solución de:

$$x^2 + 4x + 1 \leqslant 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

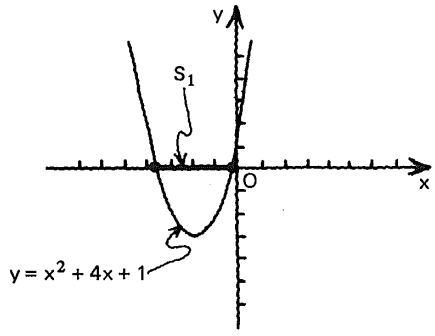
al cual le llamaremos S_1



Respuesta en el cuadro siguiente

$$S_1 = \left[-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}\right] \qquad x \in \mathbb{R}$$

(determinado algebraicamente y dado para verificación)



157

$$x^2 + 4x \leqslant -1 \qquad ①$$
$$\wedge$$
$$x^2 + 2x \leqslant 1 \qquad ②$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Tomemos enseguida la desigualdad ② y expresémosla como una desigualdad equivalente de la forma

$ax^2 + bx + c \gtrless 0$:

$$x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$$

158

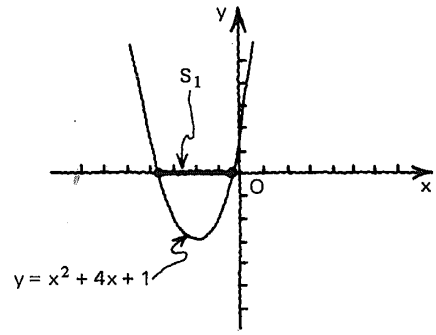
Tracemos la gráfica de

$$y = x^2 + 2x - 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

y, a partir de ella, la del conjunto solución de

$$x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$$

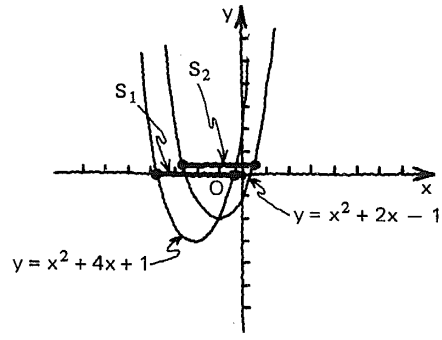
al que llamaremos S_2 .



Respuesta en el cuadro siguiente

$$S_2 = \left[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right] \qquad x \in \mathbb{R}$$

(determinado algebraicamente y dadc para verificación)



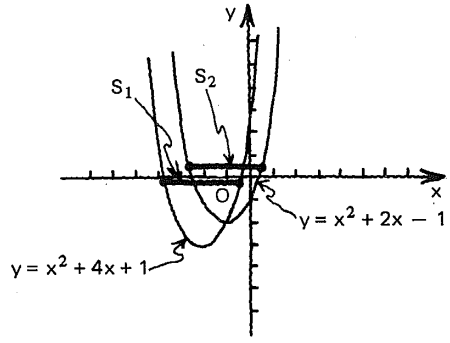
159

Ahora señalemos el conjunto solución S_c del sistema conjuntivo:

$$x^2 + 4x \leqslant -1$$

$$\wedge$$

$$x^2 + 2x \leqslant 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$



Respuesta en el cuadro siguiente

$S_1 = \left[-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}\right]$

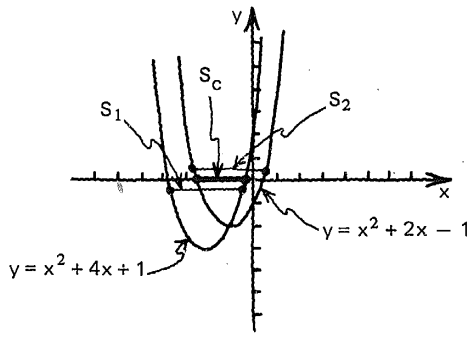
$S_2 = \left[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right]$

$S_c = S_1 \cap S_2$

$= \left[-1-\sqrt{2}, -2+\sqrt{3}\right]$

$\doteq \left[-2.41, -0.26\right]$

$x \in \mathbb{R}$



160

Nada nos cuesta señalar, finalmente, el conjunto solución del sistema disyuntivo:

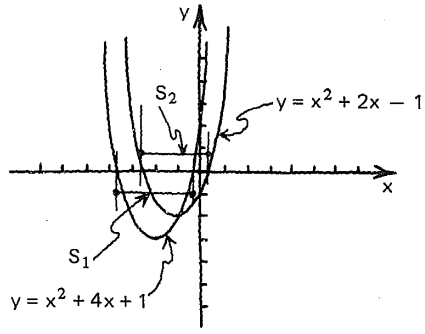
$x^2 + 4x \leqslant -1$

$\vee$

$x^2 + 2x \leqslant 1$

$x \in \mathbb{R}$

al que vamos a llamar S_D.

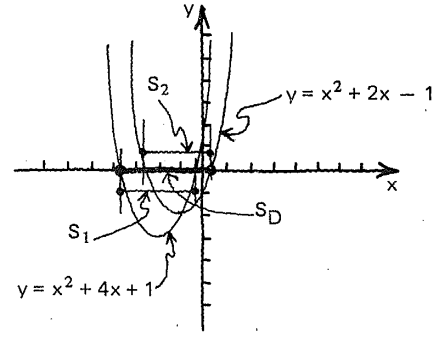


Respuesta en el cuadro siguiente

$S_D = S_1 \cup S_2$

$= \left[-2-\sqrt{3}, -1+\sqrt{2}\right]$

$\doteq \left[-3.73, 0.41\right]$



161

Estos procedimientos gráficos, debido a sus limitaciones de exactitud, deberán utilizarse más como un medio de visualización de los resultados, que como un método de solución. Además, en combinación con los procedimientos algebraicos estudiados anteriormente, constituyen un poderoso auxiliar en la solución de sistemas de ecuaciones o desigualdades.

2.11.6.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.11.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar gráficamente* el conjunto solución de una desigualdad cuadrática con una variable, transformándola previamente en una desigualdad equivalente de la forma:

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0;$$

- *determinar gráficamente* el conjunto solución de un sistema conjuntivo o disyuntivo de dos desigualdades cuadráticas con una variable.

11.7

Ecuaciones y desigualdades de segundo grado con dos variables

162

Hemos visto que
una **ecuación de primer grado con dos variables**
tiene la forma general

$$Ax + By + C = 0$$

cuya gráfica cartesiana es una **recta,** (si $A, B, C \in \mathbb{R}$)
y le llamamos **ecuación lineal.**

163

Una

ecuación de segundo grado con dos variables

tiene la forma general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

164

La gráfica cartesiana de una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Es una curva llamada

cónica*

en alguna de sus 4 formas:

- circunferencia
- elipse
- hipérbola
- parábola

*Si la gráfica "está definida" en $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$

165

La presencia del término Bxy (término **rectangular**) en la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

cuando $B \neq 0$,
indica que la gráfica cartesiana correspondiente es una **elipse**, una **hipérbola** o una **parábola** **con sus ejes no paralelos a los coordenados.**

166

Más adelante, al estudiar la Geometría Analítica, podremos demostrar que:

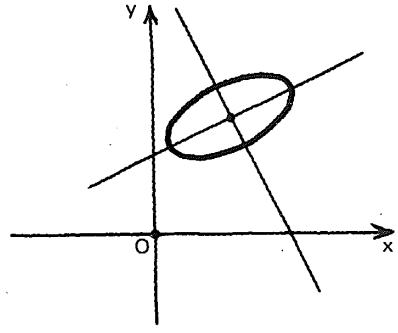
Si $B \neq 0$

y $B^2 - 4AC < 0$

la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una **elipse** con sus ejes no paralelos a los coordenados.



167

También demostraremos que:

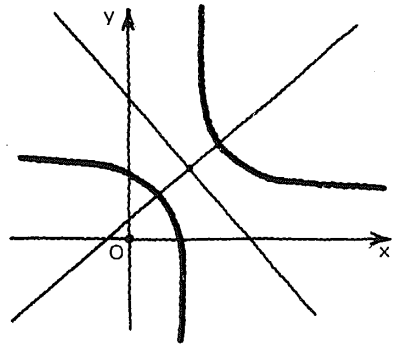
Si $B \neq 0$

y $B^2 - 4AC > 0$

la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una **hipérbola** con sus ejes no paralelos a los coordenados.



168

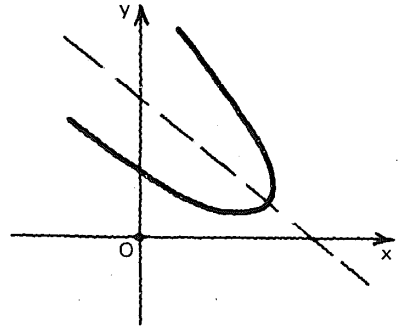
Si $B \neq 0$

y $B^2 - 4AC = 0$

la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representará una **parábola** con su eje no paralelo a ninguno de los ejes coordenados.



169

Si $B = 0$

la ecuación de segundo grado toma la forma:

$$\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

y su gráfica cartesiana puede ser una circunferencia, o bien: una elipse, una hipérbola, o una parábola

con sus ejes paralelos a los coordenados.

170

Si $B = 0$

y $A = C$

la ecuación

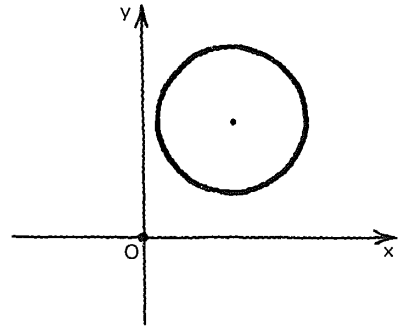
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

en su forma simplificada

$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$

representa
una

circunferencia.



171

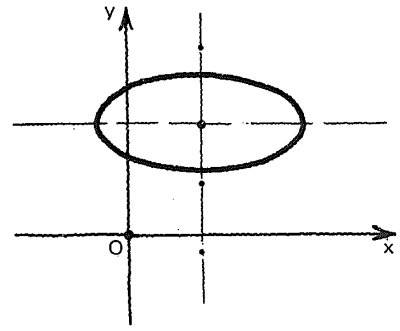
Si $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$

$A \neq C \wedge A \cdot C > 0$

(es decir que: A y B son diferentes
y del mismo signo)
la ecuación

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

representa una
elipse
con sus ejes paralelos
a los coordenados.



172

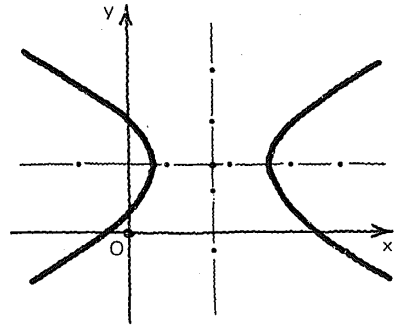
Si $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$

y $A \cdot C < 0$

(es decir que: A y C son de
signos contrarios)
la ecuación

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

representa una
hipérbola
con sus ejes paralelos
a los coordenados.



173

Si $B = 0$, y además:

$(A = 0$ y $C \neq 0)$

o

$(A \neq 0$ y $C = 0)$

la ecuación

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

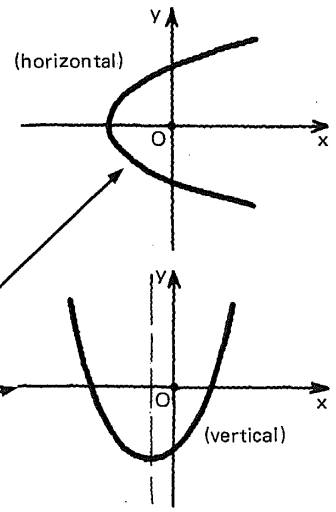
En alguna de sus formas simplificadas:

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (horizontal)

o

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ (vertical)

representa una **parábola** con su eje paralelo a alguno de los coordenados.



174

Al estudiar
la Geometría Analítica,
realizaremos un análisis
completo de las

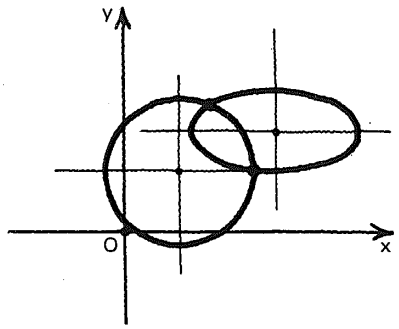
ecuaciones de segundo grado con dos variables

y su representación gráfica.

175

Veremos que:

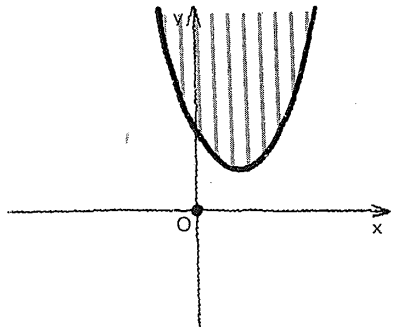
El conjunto solución de un **sistema conjuntivo de dos ecuaciones de segundo grado con dos variables** está representado en el plano cartesiano, por los puntos de intersección de las gráficas de cada una de las ecuaciones.



176

Aprenderemos a
representar gráficamente
el conjunto solución de una

desigualdad de segundo grado con dos variables. . .



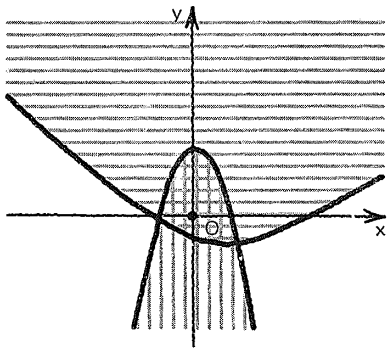
177

. . . y
el conjunto solución
de un

sistema conjuntivo o disyuntivo

de

dos o más desigualdades de segundo grado con dos variables.



2.11.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar,* valiéndose de ayudas visuales previamente elaboradas, la forma adoptada por una ecuación cuadrática con dos variables y los diferentes aspectos que adquiere su representación gráfica.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100